Merkzettel ▷ Beweise

Version – 17. April 2021

1 (Mathematische) Aussagen

Eine *(mathematische) Aussage* ist ein Satz, der entweder *wahr* oder *falsch* ist. Beispiele sind unter anderem:

- Braunschweig ist 200km von Hamburg entfernt.
- Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
- 391 ist durch 7 teilbar.

Aussagen lassen sich über die logischen Operatoren $\wedge$ (‘und’), $\vee$ (‘oder’), $\neg$ (‘nicht’), $\Rightarrow$ (‘daraus folgt’), $\Leftrightarrow$ (‘äquivalent’) miteinander verknüpfen.

Um zu zeigen, dass eine Aussage wahr oder falsch ist, ist eine logisch vollständige Begründung, ein sogenannter *Beweis*, anzugeben. Wir wollen uns im folgenden verschiedene Arten von Aussagen und Beweistechniken anschauen.

2 Existenzaussage

Eine *Existenzaussage* ist eine Aussage, dass mindestens ein Objekt eine bestimmte Eigenschaft besitzt, also dass diese Eigenschaft auf mindestens ein Objekt zutrifft. Beispiele sind unter anderem:

- Es gibt mindestens einen Monat im Kalenderjahr, der weniger als 30 Tage besitzt.
- Die Zahl 84 hat mindestens einen Primfaktor.

2.1 Beweis einer Existenzaussage

Wir wollen uns an den folgenden zwei Aussagen anschauen, wie man Existenzaussagen beweisen kann.

Aussage 1. *Es existiert eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $2k + 1 = 13$.*

Aussage 2. *Es existieren Graphen mit ausschließlich geraden Knotengraden, die keinen Hamiltonkreis besitzen.*

Da nur gezeigt werden muss, dass jeweils (mindestens) ein Element existiert welches der Aussage genügt, reicht es aus, ein solches Beispiel anzugeben. Für Aussage 1 wäre dies die Angabe einer natürlichen Zahl k und für Aussage 2 wäre dies die Angabe eines Graphen mit den geforderten Eigenschaften. Eine kurze Begründung, warum das Beispiel die geforderten Eigenschaften hat, vervollständigt den Beweis. Aussage 1 ist für $k = 6$ erfüllt, da $2 \cdot 6 + 1 = 13$ ist. Für Aussage 2 könnte man zum Beispiel den Graphen G, der in Abbildung 1 dargestellt ist, angeben und die Nichtexistenz des Hamiltonkreises damit begründen, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) auf einem Hamiltonkreis von v_1 zu v_2 kommen muss, dabei aber nur genau zwei Knoten $u_i,\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$ besuchen kann, bevor man zwangsläufig wieder bei v_1 ist.

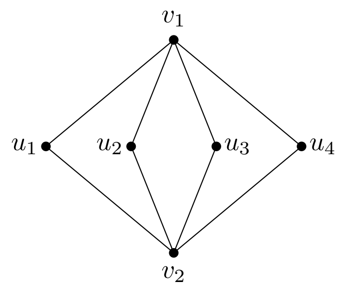

Abbildung 1: Eine Darstellung des Graphen G für Aussage 2.

2.2 Negation bzw. Widerlegung einer Existenzaussage

Wollen wir die Negation einer Existenzaussage zeigen, also die Existenz widerlegen, müssen wir eine Allaussage beweisen.

Aussage 3. *Es existiert keine natürliche Zahl k mit $2k = 7$.*

Aussage 4. *Für alle natürlichen Zahlen k gilt: $2k \neq 7$.*

Man kann sich schnell klar machen, dass die Aussagen 3 und 4 identisch sind, das heißt es gilt für eine Aussage $\mathcal{P}(x)$ die Äquivalenz

$$\neg\exists x\ \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg\mathcal{P}(x).$$

3 Allaussage

Eine *Allaussage* ist eine Aussage, dass alle Objekte einer bestimmten Art eine bestimmte Eigenschaft besitzen. Beispiele sind unter anderem:

- Alle Menschen sind sterblich.
- Alle ungeraden Zahlen sind nicht durch 2 teilbar.

3.1 Beweis einer Allaussage

Wir haben gesehen, dass für den Beweis einer Existenzaussage die Angabe eines Beispiels ausreicht. Bei Allaussagen sieht das etwas anders aus. Schauen wir uns dazu die folgenden zwei Aussagen an.

Aussage 5. *Ist $x \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist x^2 ungerade.*

Aussage 6. *In einem Baum mit mindestens zwei Knoten existieren mindestens zwei Knoten mit einem Grad von 1.*

Man kann sich schnell davon überzeugen, dass Aussage 5 für $x = 1$ wahr ist. Man könnte nun der Versuchung verfallen und von der Richtigkeit ausgehen, allerdings sollten einige Zweifel bleiben. Selbst wenn man für die ersten n ungeraden natürlichen Zahlen geprüft hat, ob deren Quadrat ungerade ist, ist so nicht klar, ob auch das Quadrat der nachfolgenden ungeraden Zahl ungerade ist. Ähnliche Zweifel sollten bestehen, würde man versuchen Aussage 6 mit der Angabe von Beispielen zu beweisen. Dies liegt an der besonderen Art dieser Aussagen, denn man kann sie wie folgt umformulieren:

Aussage 7. *Für alle $x \in \mathbb{N}$ mit x ungerade gilt, dass x^2 ungerade ist.*

Aussage 8. *Für alle Bäume mit mindestens zwei Knoten gilt, dass es mindestens zwei Knoten vom Grad 1 gibt.*

Da diese Aussagen für alle ungeraden natürlichen Zahlen bzw. alle Bäume mit mindestens zwei Knoten gelten sollen, ist klar, dass ein Beispiel kein vollständiger Beweis sein kann. Man sieht also, dass sich Allaussagen *nicht* mit der Angabe eines (bzw. endlich vieler) Beispiels beweisen lassen. Stattdessen beweist man diese beispielhaft wie folgt:

Beweis für Aussage 7. Sei x eine ungerade natürliche Zahl. Dann lässt sich x darstellen als $x = 2k + 1$ für eine natürliche Zahl k (wobei k auch 0 sein kann). Daraus folgt mit der ersten binomischen Formel

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

Aus der Möglichkeit, x^2 so darzustellen, folgt, dass x^2 ungerade ist. □

Beweis für Aussage 8. Ein Baum mit n Knoten besitzt $n - 1$ Kanten. Nach dem Handschlaglemma ist die Summe der Knotengrade eines Baumes $2n - 2$. Da der Baum zusammenhängend ist, hat jeder Knoten mindestens den Grad 1. Angenommen es gäbe (mindestens) $n - 1$ Knoten vom Grad ≥ 2, dann wäre die Summe der Knotengrade $\geq 2(n - 1) + 1 > 2n - 2$. Dies ist ein Widerspruch zum Handschlaglemma. Somit kann ein zusammenhängender Graph mit weniger als zwei Knoten vom Grad 1 kein Baum sein. Dies bedeutet im Umkehrschluss, dass jeder Baum mit mindestens zwei Knoten mindestens zwei Knoten vom Grad 1 besitzt. □

Die hier verwendeten Beweismethoden, der *direkte Beweis* und der *Widerspruchsbeweis*, werden im Folgenden noch genau erläutert.

3.2 Negation bzw. Widerlegung einer Allaussage

Wollen wir die Negation einer Allaussage zeigen, also die Allaussage widerlegen, müssen wir eine Existenzaussage beweisen.

Aussage 9. *Nicht alle natürlichen Zahlen sind prim.*

Aussage 10. *Es existiert eine natürliche Zahl x die nicht prim ist.*

Auch hier kann man sich wieder schnell klar machen, dass die Aussagen 9 und 10 identisch sind, das heißt es gilt für eine Aussage $\mathcal{P}(x)$ die Äquivalenz

$$\neg \forall x \ \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow \exists x \ \neg \mathcal{P}(x).$$

4 Direkter Beweis

Zu beweisende mathematische Aussagen haben häufig die Form *„Wenn ..., dann ...“*. Aussagenlogisch ist dies $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ („*$\mathcal{A}$ impliziert $\mathcal{B}$*“ bzw. „*Aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$*“). Dabei sind $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen und $\mathcal{B}$ die Folgerungen. Bei dem direkten Beweis geht es darum, aus $\mathcal{A}$ über eine logische Folge auf $\mathcal{B}$ zu schließen.

Aussage 11. *Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann ist sie auch durch 5 teilbar.*

Beweis. Sei x eine Zahl die durch 10 teilbar ist. Dann hat x nach der Definition der Teilbarkeit die Form $x = 10 \cdot k$ für eine ganze Zahl k. Durch Umformung erhalten wir $x = 10 \cdot k = 2 \cdot 5 \cdot k = 5 \cdot k'$ mit $k' = 2 \cdot k$. Nach der Definition der Teilbarkeit ist also x auch durch 5 teilbar. □

Bevor man mit einem Beweis anfängt, sollte man sich klar machen, was die Voraussetzungen $\mathcal{A}$ und was die Folgerungen $\mathcal{B}$ sind. Es kann und darf bei einem Beweis nur von den Voraussetzungen ausgegangen werden, da die Folgerungsrelation Wahrheit erhalten soll. Dies bedeutet, dass sich die Wahrheiten aus den Voraussetzungen auf die Schlussfolgerungen übertragen sollen. Sind also die Voraussetzungen wahr, sind die Schlussfolgerungen bei einer gültigen Folgerung auch wahr. Wenn nun aber die Voraussetzungen widersprüchlich oder falsch sind, können diese niemals wahr sein. Daher kommt es nun auf die Schlussfolgerung gar nicht mehr an, da diese nun quasi alles sein kann. Einfach gesagt: *Aus Falschem folgt Beliebiges.* Es ist also extrem wichtig darauf zu achten, dass die Voraussetzungen widerspruchsfrei und wahr sind.

5 Kontraposition

Manchmal ist es schwierig, eine Aussage direkt zu beweisen. Dann bietet sich eventuell die Kontraposition an. Wenn wir also $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zeigen sollen, können wir auch $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ zeigen. Dies ist intuitiv klar, da wenn $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ impliziert, $\mathcal{A}$ nicht gelten kann, wenn $\mathcal{B}$ nicht gilt. Die Implikation *„Wenn es regnet, ist die Straße nass.“* wird mittels Kontraposition zu *„Wenn die Straße nicht nass ist, hat es nicht geregnet.“*

Aussage 12. *Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \neq y$ gilt: $\frac{x+y}{x-y}$ unkürzbar $\Rightarrow$ $\frac{x}{y}$ unkürzbar.*

Beweis. Angenommen $\frac{x}{y}$ ist kürzbar. Dann besitzen x und y einen gemeinsamen Teiler m, sodass $r, s \in \mathbb{N}$ mit $x = m \cdot r$ und $y = m \cdot s$ existieren. Damit ist aber $x - y = m(r - s)$ und $x + y = m(r + s)$. Also besitzen auch $(x - y)$ und $(x + y)$ den gemeinsamen Teiler m und der Bruch $\frac{x+y}{x-y}$ ist kürzbar. □

6 Äquivalenzbeweis

Äquivalenzbeweise sind für Aussagen der Form $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ gefordert, das heißt $\mathcal{A}$ gilt genau dann, wenn auch $\mathcal{B}$ gilt. Manchmal können diese Aussagen direkt über Äquivalenzumformungen gezeigt werden. Funktioniert dies nicht, teilt man die Äquivalenzaussage in die Implikationen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ auf und zeigt diese mit geeigneten Beweismethoden.

7 Widerspruchsbeweis

Bei einem Widerspruchsbeweis machen wir uns die Tatsache zu nutze, dass mathematische Aussagen entweder wahr oder falsch sind. Daher nehmen wir an, dass die zu beweisende Aussage $\mathcal{P}$ falsch ist und nutzen dies als Voraussetzung um einen Widerspruch zu folgern. Dann kann die Annahme $\neg\mathcal{P}$ nicht wahr sein, also gilt $\mathcal{P}$.

Aussage 13. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen und seien diese $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Nun betrachten wir das Produkt aller dieser endlich vielen Primzahlen und addieren 1 zu diesem Produkt, das heißt die Zahl $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$. Die Zahl q darf keine Primzahl sein, da sie sonst in der endlichen Primzahlmenge gefehlt hätte. Gleichzeitig teilt aber keine Primzahl $p_i,\ 1 \leq i \leq n$ die Zahl q, weshalb q eine Primzahl sein muss. Dies ist ein Widerspruch, also gilt die Aussage. □

Aussage 14. *Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl x eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.*

Beweis. Angenommen $\sqrt{x} = k$ wäre ungerade. Dann ist wegen des Beweises zu Aussage 7 auch $k^2 = x$ ungerade, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist, dass x gerade ist. Also ist die getroffene Annahme falsch, womit gezeigt ist, dass $\sqrt{x}$ gerade ist. □

Ein Widerspruchsbeweis lässt sich auch bei Aussagen über Graphen führen.

Aussage 15. *Besitzt ein zusammenhängender einfacher Graph eine Brücke, so besitzt der Graph Knoten mit ungeradem Grad.*

Beweis. Sei G ein Graph mit mindestens einer Brücke und angenommen alle Knoten in G haben geraden Grad. Dann besitzt dieser Graph eine Eulertour. Sei e die Brücke, das heißt durch das Entfernen von e aus G zerfällt G in zwei Zusammenhangskomponenten. Die Kante e muss Teil der Eulertour sein. Zum Zeitpunkt wenn e verwenden wird, verlassen wir eine Zusammenhangskomponente des Graphen und kommen nicht mehr zurück (ohne e mehrfach zu verwenden), da e sonst keine Brücke gewesen wäre. Der Graph G kann also keine Eulertour enthalten und somit ist die Aussage gezeigt. □

Bei einer Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zeigen wir bei einem Widerspruchsbeweis also, dass die Annahme, $\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ könnten gleichzeitig gelten, zum Widerspruch führt.

8 Vollständige Induktion

Bei der vollständigen Induktion handelt es sich um ein mathematisches Beweisverfahren für Allaussagen von speziellen Mengen. Sie hat ihren Ursprung als Beweisverfahren für Aussagen innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen, kann allerdings bei allen inkrementell aufbaubaren Mengen verwendet werden.

8.1 Natürliche Zahlen

Um zu zeigen, dass eine Aussage für $n \geq m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ gilt, genügt es zu zeigen, dass die Aussage für $n = m$ gilt und aus der Gültigkeit der Aussage für eine Zahl $n \geq m$ stets auch die Gültigkeit für die folgende Zahl $n + 1$ folgt. Dieses Verfahren folgt direkt aus der Definition der natürlichen Zahlen.

Die natürlichen Zahlen[1] und ihre Eigenschaften werden in den fünf Peano-Axiomen charakterisiert.

1: 0 ist eine natürliche Zahl.

2: Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n^+ als Nachfolger.

3: 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

4: Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.

5: Enthält X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n^+, dann ist $X = \mathbb{N}$.

Theorem 1 (Vollständige Induktion)**.** *Sei P eine Eigenschaft in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Wenn $P(0)$ und $P(n) \Rightarrow P(n^+)$ gilt, so gilt P für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $X := \{n \in N \mid P(n)\}$. Nach Voraussetzung gilt $0 \in X$ sowie $n \in X \Rightarrow n^+ \in X$. Mit dem fünften Peano-Axiom folgt daher $X = \mathbb{N}$. □

Wir zeigen nun also eine Aussage $P(0)$ und dass aus der Gültigkeit von $P(n)$ die Gültigkeit von $P(n+1)$ folgt. Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen. Der Nachweis für $P(0)$ heißt dabei der Induktionsanfang, $P(n)$ die Induktionsvoraussetzung und der Nachweis für die Implikation $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ der Induktionsschritt. Es kann dabei durchaus vorkommen, dass eine Aussage erst ab einer bestimmten natürlichen Zahl gilt. Der Induktionsanfang wird dann mit dieser Zahl bewiesen und alles weitere folgt dann analog.

Bildlich kann man sich das ganze vorstellen wie eine Reihe von sorgfältig aufgestellten Dominosteinen, bei dem alle Steine nacheinander fallen, sobald man den ersten antippt.

Aussage 16 (Eulersche Summenformel)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Beweis. Wir beweisen diese Behauptung mit vollständiger Induktion über n.

Induktionsanfang: $i = 1$. $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = (1 \cdot (1+1))/2$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für beliebiges aber festes n.

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i \underset{\text{I.V.}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Damit ist $P(n+1)$ gezeigt und die Behauptung folgt nach dem Prinzip der Induktion. □

[1] Wer seine natürlichen Zahlen gern ohne 0 definiert, kann in den Axiomen überall die 0 durch eine 1 ersetzen.

8.2 Graphen

Die Methode der vollständigen Induktion kann auch bei Aussagen über Graphen angewendet werden.

Aussage 17. *Ein einfacher Graph G mit Maximalgrad k ist $(k+1)$-färbbar.*

Wir wollen diese Aussage mit Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen beweisen.

Beweis. Sei $P(n)$ die Behauptung, dass ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad höchstens k, $(k+1)$-färbbar ist. Diese Behauptung benötigen wir in der Induktionsvoraussetzung.

Induktionsanfang: $n = 1$. Ein Graph mit nur einem Knoten hat Maximalgrad 0. Dieser Graph ist mit einer Farbe färbbar.

Induktionsvoraussetzung: Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig, n fest.

Induktionsschritt: Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n+1$ Knoten und Maximalgrad höchstens k. Wir entfernen einen beliebigen Knoten v (mitsamt seiner inzidenten Kanten) und erhalten damit einen Graphen G' mit n Knoten. Der Maximalgrad ändert sich nicht zwangsläufig, ist also immer noch höchstens k. G' ist nach Induktionsvoraussetzung mit $k+1$ Farben färbbar. Nun fügen wir v (mitsamt seiner inzidenten Kanten) wieder hinzu. Da v maximal k viele Nachbarn hat, wir aber $k+1$ viele Farben zur Verfügung haben, können wir v mit der verbliebenen Farbe färben. Damit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der Induktion. □

Bei Induktionsbeweisen auf Graphen passieren häufig sogenannte *build-up errors*. Diese entstehen durch die fehlerhafte Annahme, *jeder beliebige* Graph der Größe $n+1$ mit einer bestimmten Eigenschaft, kann aus einem Graphen der Größe n mit dieser Eigenschaft erstellt werden. Dies funktioniert im Allgemeinen nicht!

Um diese build-up errors zu vermeiden, nutzt man im Induktionsschritt einen *shrink down, grow back*-Ansatz. Dazu nimmt man im Induktionsschritt einen *beliebigen* Graphen mit $n+1$ Knoten, entfernt einen *beliebigen* Knoten und wendet dann die Induktionsvoraussetzung $P(n)$ auf diesen Graphen an. Danach fügt man den Knoten wieder hinzu und argumentiert, dass $P(n+1)$ gilt. Dieser Ansatz (angepasst auf die jeweilige) funktioniert auch für für alle anderen Strukturen, über die man eine Eigenschaft induktiv beweisen möchte, zum Beispiel Kanten oder Zusammenhangskomponenten.

Wir wollen einmal sehen, wie so ein build-up Fehler entsteht und wie sich der shrink-down, grow-back Ansatz dagegen verhält.

Aussage 18. *Wenn in einem Graphen jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat, ist der Graph zusammenhängend.*

Die Behauptung aus Aussage 18 ist falsch, wie man am Graphen aus Abbildung 2 sehen kann. Wir können diese Behauptung allerdings per Induktion beweisen, wenn wir die Induktion falsch angehen.

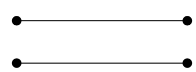

Abbildung 2: Darstellung eines unzusammenhängenden Graphen, wobei jeder Knoten den Grad 1 hat.

Dies könnte wie folgt aussehen. Sei $P(n)$ die Behauptung, dass ein Graph mit n Knoten zusammenhängend ist, wenn jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat. Als Induktionsanfang nimmt man einen Graphen mit zwei Knoten und einer Kante. Dieser erfüllt offensichtlich die geforderten Eigenschaften (alle Knoten haben Grad mindestens 1 und er ist zusammenhängend). Sei G ein Graph mit n Knoten und gelte $P(n)$, mit n beliebig aber fest. Nun fügen wir einen neuen Knoten v hinzu und erhalten einen Graphen G' mit $n+1$ Knoten. Damit G' die Gradeigenschaften erfüllt, muss v mit mindestens einer Kante zu einem Knoten in G' verbunden sein. Sei o.B.d.A. dieser Knoten y. Da der Graph ohne v zusammenhängend war (wir gehen davon aus, dass $P(n)$ gilt!), gibt es von y mindestens einen Pfad zu jedem anderen Knoten in G. Wir müssen nun noch zeigen, dass es in G' auch einen Pfad von v

zu jedem anderen Knoten gibt. Da v mit y verbunden ist, können wir nun die Pfade von y zu jedem anderen Knoten um die Kante $\{v, y\}$ verlängern und erhalten Pfade von v zu allen anderen Knoten (siehe Abbildung 3). Damit ist G' zusammenhängend.

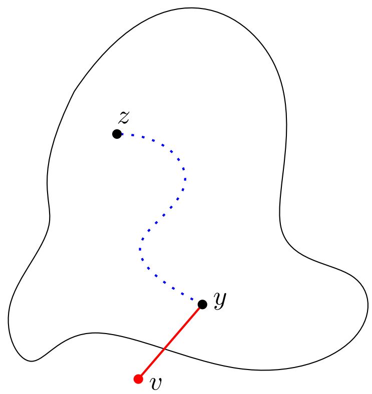

Abbildung 3: Verlängerung der Pfade aus G um die Kante $\{v, y\}$.

Wie passt hier nun das Beispiel aus Abbildung 2 hinein? Nutzen wir nun den shrink-down, grow-back-Ansatz im Induktionsschritt, passiert folgendes: Sei G' ein Graph mit $n + 1$ Knoten. Lösche einen beliebigen Knoten v aus G' und erhalte einen Graphen G'' mit n Knoten bei dem jeder Knoten mindestens den Grad 1,... whoops. Es können Knoten vom Grad 0 entstehen, so dass auf diesen Graphen die Induktionsvoraussetzung nicht angewendet werden kann; zum Glück, denn die Behauptung aus Aussage 18 ist, wie wir in Abbildung 2 gesehen haben, falsch.