Ecole Centrale Paris

Laboratoire Génie Industriel

Cahier d'Études et de Recherche / Research Report

Les différents modèles de localisation et relocalisation des ambulances dans la gestion des systèmes d'aides médicales urgentes

Mahdi Moeini, Zied Jemai, Frédéric Meunier and Evren Sahin

CER 11– 13
Novembre 2011

Génie Industriel

LES DIFFÉRENTS MODÈLES DE LOCALISATION ET RELOCALISATION DES AMBULANCES DANS LA GESTION DES SYSTÈMES D'AIDES MÉDICALES URGENTES

Mahdi Moeini[1], Zied Jemai[2], Frédécric Meunier[3] et Evren Sahin[4]

Abstract. Ce texte est une synthèse des textes bibliographiques et les articles existant dans les littératures auxquels nous avons ajouté certains nouveaux modèles d'aides médicales urgentes et nos propres remarques et analyses sur les modèles. Le but de ce document est de présenter les différents modèles d'aides médicales urgentes, leurs défauts et leurs avantages et, si nécessaire, les motivations qui ont mené les chercheurs à les proposer.

1. Introduction

Dans ce texte on va présenter certaines catégories des modèles de localisation et re-localisation des ambulances dans le contexte d'amélioration des systèmes d'aides médicales urgentes. On classifie d'abord les modèles en deux grands groupes :

- Les modèles mono-périodes,
- Les modèles multi-périodes.

Ces modèles, à leur tour, se trouvent en quatres catégories :

- Modèles déterministes à couverture simple,

1. Novembre 2011.

[1] LGI, Ecole Centrale Paris, Grande Voie des Vignes, F-92 295 CHÂTENAY-MALABRY Cedex (mahdi.moeini@ecp.fr)

[2] LGI, Ecole Centrale Paris, Grande Voie des Vignes, F-92 295 CHÂTENAY-MALABRY Cedex (zied.jemai@ecp.fr)

[3] LVMT, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (frederic.meunier@enpc.fr)

2. [4] LGI, Ecole Centrale Paris, Grande Voie des Vignes, F-92 295 CHÂTENAY-MALABRY Cedex (evren.sahin@ecp.fr)

– Modèles déterministes à couverture multiple,
– Modèles probabilistes (stochastiques) à couverture simple,
– Modèles probabilistes (stochastiques) à couverture multiple.

On a adopté les traductions françaises des noms des modèles selon le texte [5]. Dans ce qui suit, nous allons d'abord étudier différents modèles mono-périodes et ensuite on se focalisera sur les modèles multi-périodes.

2. Modèles mono-périodes

Cette section est consacrée à la présentation des modèles mono-périodes.

2.1. Modèles déterministes à couverture simple

Problème de Localisation avec Couverture Totale (PLCT) ou Location Set Covering Problem introduit par Toregas et al. [41] :

Objectif du modèle : ce modèle vise à proposer une borne inférieure quant au nombre de véhicules à utiliser de façon à assurer la couverture de toutes les zones de demandes.

Soit :
$x_j \in \{0,1\}$: une variable binaire qui vaut 1 lorsqu'un véhicule est localisé au site j.
N_i : l'ensemble des sites potentiels pouvant assurer la couverture d'une zone de demande i à l'intérieur d'une distance ou d'un délai prescrit T.

Le modèle de Toregas et al. se formule de façon suivante :

PLCT

$$\min \sum_{j=1}^{m} x_j \tag{1}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

où m représente le nombre des sites potentiels et n le nombre de zone de demande.

Le modèle **PLCT**

(1) vise à minimiser le nombre de véhicules nécessaires, de façon à garantir la couverture de toutes les zones de demandes à l'intérieure de T.

(2) Un seul véhicule pouvant être localisé à chaque site sélectionné.

Défauts :
Le modèle propose une borne inférieure qui peut être très élevée, même cela peut rendre le modèle irréalisable en pratique. Dans certains cas, il est donc préférable de déterminer la meilleure utilisation possible d'une flotte limitée de véhicules [5].

Vues les limites associées au modèle PLCT, Church et Revelle ont formulé le problème de localisation avec couverture maximale (**PLCM**) ou Maximal Covering Location Problem (MCLP) [10].

Le but du modèle suppose qu'un nombre donné de véhicule est disponible et il essaie de maximiser la population couverte.

Soit :

a_i : la densité de la population associée à la zone de demande i,

y_i : une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande i est couverte par au moins un véhicule,

U : le nombre total de véhicules à localiser.

PLCM :

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \tag{4}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq y_i, i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = U, \tag{6}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

PLCM vise à maximiser la population couverte en localisation U véhicules. Pourtant, dans certains cas, il peut être intéressant de garantir un certain niveau de service minimum à l'ensemble de la population [5, 10]. Pour cela on peut ajouter une contrainte garantissant la couverture de toutes les zones à l'intérieur d'une distance ou d'un délai S moins strict, $S > T$. Soit M_i l'ensemble des sites potentiels pouvant assurer la couverture d'une zone de demande i à l'intérieur de S, Church et ReVelle propose la contrainte suivante [5, 10] :

$$\sum_{j \in M_i} x_j \geq 1, i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Dans certains cas, on s'intéresse à la moyenne de distance qu'un client (demandeur de service) doit faire afin de recevoir un service ou la distance moyenne qu'un fournisseur de service doit faire afin de rendre les services au patient [15]. Le problème **P-Median** s'adresse à ce type de problèmes. Le problème P-Median

vise donc à minimiser la distance totale pondérée (ou la moyenne) afin de couvrir les demandes [23].
Soit :

d_{ij} : la distance de la demande i du site j,

y_{ij} : une variable binaire qui vaut 1 si la demande i est couverte par un ambulance située au site j,

---

P-Median :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i d_{ij} y_{ij} \tag{9}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 1, i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

$$y_{ij} - X_j \leq 0, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_j = U, \tag{12}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

La contrainte (10) veut dire que chaque demande est couverte par un seul véhicule. La contrainte (11) stipule que chaque demande peut être associée à un site disponible.

Hongzhong et al. ont présenté des modèles pour les situations d'urgence dans une grande échelle [25].

Dans ces modèles on s'intéresse au recouvrement du plus grand nombre de demandes générées dans une situation urgente.

Pour un scénario s, les auteurs ont considéré des coefficients et ils les ont intégrés dans les modèles. Les modèles proposés sont basés sur les modèles classiques d'optimisation combinatoire. Apart des coefficients intégrés dans les modèles, les modèles proposés sont des extensions directes des modèles classiques et ils suivent la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum\limits_{j=1}^{J} \sum\limits_{i=1}^{I} (Coef_{is} Pop_i x_i) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{j \in Cov_i} z_j r_{js} \geq L_i x_i, & \forall \quad i; \\ \sum\limits_{j \in J} z_j \leq U_j, & \\ x_i, z_j \in \{0, 1\}, & \forall \quad i, j. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{15}$$

---

r_{js} est la réduction de service de la base j lors du scénario s.
$Coef_{is}$ sont des coefficients concernant les impacts etc. (les attaques terroristes etc.) des cas de services d'aides médicales urgentes à grande échelle (*Large-Scale EMS*). Ce sont des paramètres à tenir compte dans ce genre de situation et leurs valeurs doivent être calculées selon chaque situation.

Un modèle P-Median pour Large-Scale EMS :

Pour un scénario s :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Coef_{is} Pop_i D_{ij} x_{ij}) \\ s.t. \begin{cases} \sum_{j \in J} z_j \leq U_j, & \\ \sum_{j \in J} r_{js} x_{ij} = L_i, & \forall \quad i; \\ x_{ij} \leq z_j, & \forall \quad i, j; \\ x_{ij}, z_j \in \{0,1\} & \forall \quad i, j. \end{cases} \end{cases} \tag{16}$$

Un modèle P-Center pour Large-Scale EMS :

Le modèle minimise le maximum de distance nécessaire pour donner les services à toutes les demandes.

Pour un scénario s :

$$\begin{cases} \min L \\ s.t. \begin{cases} \sum_{j \in J} z_j \leq U_j, & \\ \sum_{j \in J} r_{js} x_{ij} = L_i, & \forall \quad i; \\ x_{ij} \leq z_j, & \forall \quad i, j; \\ L \geq \frac{\sum_{j=1}^{J} (Coef_{is} Pop_i D_{ij} x_{ij})}{L_i}, & \forall \quad i, s; \\ x_{ij}, z_j \in \{0,1\} & \forall \quad i, j. \end{cases} \end{cases} \tag{17}$$

Les modèles qui entrent dans la catégorie des problèmes de couverture maximale, P-median et Problème de Localisation avec Couverture Totale, (les modèles qu'on a vus jusqu'à présent) ignorent les besoins du système à se préparer afin de pouvoir répondre aux niveaux de demandes **qui varient**.

Dans un travail récent [31,32], les auteurs ont présenté un modèle qui se trouve dans le cadre d'une analyse au pire des cas d'un système d'aides médicales urgentes. Le modèle s'intitule "**Min-Max Charge**" et vise à minimiser la charge maximum d'un véhicule.

Soit :
K : l'ensemble des véhicules,
$y_{jk} \in \{0,1\}$: une variable binaire qui vaut 1 si le véhicule k est affecté au point de service j,
d_i : la densité de demande au point de demande i,

$\delta_{ij} \in \{0,1\}$: un paramètre binaire qui vaut 1 si le point de service j peut couvrir le point de demande i,

x_{ki} : s'interprète comme le taux d'utilisation du véhicule k pour servir la demande i,

Le modèle **Min-Max Charge** se formalise comme suit :

$$\min \quad \max_{k \in K} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \tag{18}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jk} = 1 \quad : k = 1, \ldots, |K|, \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} x_{ki} = d_i \quad : i = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} y_{jk} \geq \frac{1}{d_i} x_{ki} \quad : i = 1, \ldots, n; k \in K, \tag{21}$$

$$y_{jk} \in \{0,1\} \quad : j = 1, \ldots, m; k \in K, \tag{22}$$

$$x_{ki} \geq 0 \quad : i = 1, \ldots, n; k \in K, \tag{23}$$

En introduisant la variable technique t, le modèle se formule comme suit :

Min-Max Charge :

$$\min \quad t \tag{24}$$

sous les contraintes :

$$t \geq \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \quad : k = 1, \ldots, |K|, \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jk} = 1 \quad : k = 1, \ldots, |K|, \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} x_{ki} = d_i \quad : i = 1, \ldots, n, \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} y_{jk} \geq \frac{1}{d_i} x_{ki} \quad : i = 1, \ldots, n; k \in K, \tag{28}$$

$$y_{jk} \in \{0,1\} \quad : j = 1, \ldots, m; k \in K, \tag{29}$$

$$x_{ki} \geq 0 \quad : i = 1, \ldots, n; k \in K, \tag{30}$$

$$t \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Dans le modèle **Min-Max Charge**, l'objective consiste à localiser les véhicules de façon à minimiser la charge maximum sur les véhicules. La contrainte (26) est la contrainte d'affectation des véhicules, autrement dit, la contrainte veut dire que chaque véhicule doit être affecté à un poste d'attente. La contrainte (27) assure que toutes demandes sont couvertes et la contraintes (28) impose aux points de service à disposer un suffisant de véhicule afin de servir les demandes.

L'avantage principale de ce modèle est de contrôler exactement la charge d'un véhicule. On demande à couvrir, et à éviter des véhicules trop chargé à un endroit, ce qui empêchera la congestion dans le système.

L'inconvénient de ce modèle est dû au fait qu'il peut devenir (facilement) irréalisable et par conséquent inutilisable en pratique.

2.2. Modèles déterministes à couverture multiple

L'un des défauts des modèles à couverture simple est lié au fait que ces modèles sont basés sur l'hypothèse de disponibilité des véhicules au moment où l'appel de demande urgente est reçu. Supposons qu'une zone est couverte par un seul véhicule. Si l'on reçoit deux appels rapprochés, on aura le problème de couverture de demandes [5]. Pour pallier ces handicaps, on propose les modèles à couverture multiple. De cette manière, on essaie d'augmenter la probabilité d'avoir au moins un véhicule disponible afin de pouvoir couvrir les demandes dans la zone à l'intérieur du délai prescrit.

Les modèles à couverture multiple essaie d'améliorer les modèles à couverture simple en considérant (de façon indirecte) l'aspect aléatoire des demandes.

Daskin et Stern ont présenté un modèle intitulé "hierarchical objective set covering problem (HOSC)" ou le problème de couverture avec objectifs hiérarchiques **(PCOH)** afin d'introduire le concept de couverture multiple [12].

Soit :

W : la pondération accordée au premier objectif,

x_j : une variable binaire qui vaut 1 lorsqu'un véhicule est localisé au site j.

s_i : le nombre des véhicules supplémentaires pouvant assurer la couverture de la zone de demande i,

N_i : l'ensemble des sites potentiels pouvant assurer la couverture de la zone de demande i à l'intérieur d'une distance ou d'un délai prescrit T.

PCOH :

$$\min W \sum_{j=1}^{m} x_j - \sum_{i=1}^{n} s_i \tag{32}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j\in N_i} x_j - s_i \geq 1, i = 1, \ldots, n, \tag{33}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, m. \tag{34}$$

$$s_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Le modèle PCOH vise, dans un premier temps, à minimiser le nombre nécessaire de véhicules afin d'assurer la couverture de toutes les zones de demande à l'intérieur de T, puis, dans un deuxième temps, à maximiser la couverture multiple des zones de demandes, c'est-à-dire le nombre de véhicules supplémentaires pouvant en assurer la couverture.

Les défauts du modèle :

- le modèle PCOH donne une importance égale à tous les véhicules supplémentaires. En pratique, il peut sembler peu intéressant d'assurer la couverture d'une zone de demande par plus de deux véhicules [5].
- puisque le modèle ne considère pas la densité de population associée à chaque zone de demande, il aura tendance à regrouper les véhicules autour d'un certain nombre de points faciles à couvrir, laissant ainsi des points plus difficiles à desservir couverts une seule fois.

Afin de pallier les limites du modèle PCOH, le modèle PDDA (le problème dominicain de déploiement des ambulances) a été proposé par Eaton et al [18].

En fait, afin d'améliorer le modèle PCOH, il a été modifié de façon à considérer la densité de population associée à chaque zone de demande. Avec cette modification, le problème PDDA vise à maximiser la population couverte plusieurs fois mais en même temps le modèle essaie de minimiser le nombre de véhicules nécessaires pour assurer la couverture de toutes les zones de demandes.

Le défaut : les véhicules supplémentaires (autrement dit, la couverture multiple) ont toujours la même contribution dans la fonction objectif ce qui ne permet pas d'éviter le problème d'accumulation inutile de véhicules dans des zones qui sont faciles à desservir.

Il n'y a pas de différence significative au niveau de formulation de modèle entre PCOH et PDDA ; la différence repose sur l'ajout d'un facteur associé à la densité de population qui est notée par a_i ; ce paramètre est ajouté à la fonction objectif :

PDDA :

$$\min \quad W\sum_{j=1}^{m} x_j - \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \tag{36}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j\in N_i} x_j - s_i \geq 1, i = 1,\ldots,n, \tag{37}$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,m. \tag{38}$$

$$s_i \geq 0, i = 1,\ldots,n. \tag{39}$$

En 1979 Schilling et al. ont présenté le modèle Tandem Equipment Allocation Model (TEAM) qui considère deux types d'équipements A et B correspondant à deux types de véhicules ALS et BLS [37].

Soit r^A et r^B deux rayons de couverture par les véhicules A et B :

$$W_i^A = \{j \in W : t_{ij} \leq r^A\},$$

$$W_i^B = \{j \in W : t_{ij} \le r^B\},$$

et soit :

x_j^A : une variable binaire qui vaut 1 si un véhicule de type A est localisé en $j \in W$,

x_j^B : une variable binaire qui vaut 1 si un véhicule de type B est localisé en $j \in W$,

y_i : une variable binaire qui vaut 1 si $i \in V$ est couvert par deux types de véhicule.

TEAM :

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \tag{40}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in W_i^A} x_j^A \ge y_i, i = 1, \ldots, n, \tag{41}$$

$$\sum_{j \in W_i^B} x_j^B \ge y_i, i = 1, \ldots, n, \tag{42}$$

$$\sum_{j \in W} x_j^A = U^A, \tag{43}$$

$$\sum_{j \in W} x_j^B = U^B, \tag{44}$$

$$x_j^A \le x_j^B, j = 1, \ldots, m, \tag{45}$$

$$x_j^A, x_j^B \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, m, \tag{46}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n. \tag{47}$$

Ce modèle est une extension directe du modèle MCLP et le modèle considère une hiérarchie par les contraintes (45).

Dans le même état d'esprit que le modèle TEAM, d'autres modèles ont été proposés afin de pallier les limites du modèle PCOH. Ce sont les modèles **BACOP** introduits par Hogan et ReVelle [24].

Ces modèles

– considèrent la densité de la population,

– accordent une importance hiérarchique aux différents niveaux de couverture.

Les auteurs formulent donc deux modèles où seulement la première et la deuxième couverture sont considérées dans la fonction objectif. Ceci permet ainsi de pallier le problème des modèles précédents quant à l'inégalité de la localisation des véhicules.

Soit :

u_i : une variable binaire qui vaut 1 lorsqu'une zone de demande i est couverte par **au moins deux véhicules**.

x_j : une variable entière associée au nombre de véhicules localisés au site j, Le premier modèle qu'ils ont proposé soit le modèle de localisation avec couverture secondaire maximale (MLCSM) ou maximal backup coverage model 1 (BACOP 1) se formule de la façon suivante :

MLCSM (BACOP 1) :

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \tag{48}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_j - u_i \geq 1, i = 1, \ldots, n, \tag{49}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = U_{total}, \tag{50}$$

$$u_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n, \tag{51}$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{entiere}, j = 1, \ldots, m. \tag{52}$$

Le MLCSM vise à maximiser la population couverte **deux fois** à l'intérieur de la distance ou du délai prescrit en considérant le nombre minimal de véhicules nécessaires pour assurer une couverture totale.

Autrement dit : le modèle MLCSM cherche la meilleure configuration possible, en terme de couverture secondaire, lorsque U_{total} véhicules sont employés.

Le deuxième modèle que Hogan et ReVelle propose s'intitule le modèle de localisation avec couverture secondaire (**MLCS**) ou backup coverage model 2 (**BACOP 2**).

Soit :

ω : un paramètre prenant une valeur entre 0 et 1,

y_i : une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande i est couverte **une fois**.

Le modèle MLCS se formule comme la suite :

MLCS (BACOP 2) :

$$\max \omega \sum_{i=1}^{n} a_i y_i + (1 - \omega) \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \tag{53}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_j - y_i - u_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \tag{54}$$

$$u_i - y_i \leq 0, i = 1, \ldots, n, \tag{55}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = U_{total}, \tag{56}$$

$$u_i, y_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n, \tag{57}$$
$$x_j \geq 0 \quad \text{entiere}, j = 1, \ldots, m. \tag{58}$$

Le modèle vise plutôt la maximisation simultanée de la première et de la deuxième couverture en utilisant un nombre donné de véhicules (i.e., U_{total}).

Gendreau et al. ont proposé un autre modèle qui s'intitule "le modèle avec double standard (MDS)" ou "double standard model (DSM)" [20].

Le modèle considère simultanément l'idée de double couverture et l'application de différents rayons de couverture. MDS s'inspire de la norme émise par EMS des Etats-Unis : Il faut qu'une proportion α de la population soit atteignable à l'intérieur d'un temps S tandis que la totalité de la population doit être atteignable à l'intérieur d'un temps T ($T > S$).

Soit :

y_i : une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande i est couverte **une fois**.

u_i : une variable binaire qui vaut 1 lorsqu'une zone de demande i est couverte **deux fois**.

x_j : une variable entière associée au nombre de véhicules localisés au site j,

U_j : la limite sur le nombre de véhicules à localiser au site j,

N_i : l'ensemble des sites potentiels pouvant assurer la couverture de la zone de demande i à l'intérieur d'une distance ou d'un délai prescrit S.

M_i : l'ensemble des sites potentiels pouvant assurer la couverture d'une zone de demande à l'intérieur d'une distance ou d'un délai prescrit T,

le modèle se formule comme suit :

MDS :

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \tag{59}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in M_i} x_j \geq 1, i = 1, \ldots, n, \tag{60}$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{61}$$
$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq u_i + y_i, i = 1, \ldots, n, \tag{62}$$
$$u_i \leq y_i, i = 1, \ldots, n, \tag{63}$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_j = U_{total}, \tag{64}$$
$$x_j \leq U_j, j = 1, \ldots, m, \tag{65}$$
$$u_i, y_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n, \tag{66}$$
$$x_j \geq 0 \quad \text{entiere}, j = 1, \ldots, m. \tag{67}$$

Le modèle MDS :
- vise à maximiser la population couverte au moins deux fois à l'intérieur de S,
- assure qu'une proportion minimale α de la population soit couverte à l'intérieur de S,
- assure que la totalité de la population soit couverte à l'intérieur de T (60), et cela en considérant la localisation d'un nombre donné de véhicule (64).

La principale contribution du MDS repose l'ajout de la contrainte (61) visant à assurer la couverture d'une proportion α de la population à l'intérieur de S [5,20]. Il faut savoir que le problème peut devenir **irréalisable** si le nombre de véhicules disponibles est insuffisant pour satisfaire simultanément les contraintes (60) et (61) [5].

Storebeck a proposé une formulation plus flexible, basée sur la programmation par objectifs (goal programming) [39].
Le problème de localisation avec couverture maximale et multiple (PLMM) (ou "maximal-multiple location covering problem (MMLCP)") vise à **minimiser** la population **non-couverte** et à **maximiser** la **couverture multiple** (68) en considérant un nombre donné de véhicules à localiser (70).

Soit :

z_i : une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande n'est pas couverte par au moins un véhicule.

s_i : le nombre des véhicules supplémentaires pouvant assurer la couverture de la zone de demande i.

PLMM :

$$\min W \sum_{i=1}^{n} a_i z_i - \sum_{i=1}^{n} s_i \tag{68}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_j - s_i + z_i \geq 1, i = 1, \ldots, n, \tag{69}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = U_{total}, \tag{70}$$

$$x_j, z_i \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n, \tag{71}$$

$$s_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \tag{72}$$

Le modèle **PLMM** peut être rendu sous forme du modèle **BACP 2** par les transformations suivantes, pour cela, il suffit de mettre :

$$y_i := 1 - z_i$$

et de ajouter certains paramètres dans la fonction objectif.

Les défauts :

- • De la même manière que le modèle PCOH, le modèle PLMM donne une importance égale à tous les véhicules, et cela n'est pas bien.
- • Il n'y a pas de limite sur le nombre des véhicules supplémentaires pouvant localisés dans un site, alors il y aurait une congestion des véhicules dans les zones faciles à accéder.

Dans un article récent, Coskun et Erol [11] ont proposé un modèle de localisation et dimensionnement. Leur modèle a des caractéristiques suivantes :

- le modèle vise à minimiser les coûts d'installation des sites et les coûts d'opération sur une période donnée,
- le modèle considère deux types de véhicules A et B,
- le modèle tient compte du minimum et du maximum de population pouvant être couverte par un véhicule,
- le lieu de chacun des hôpitaux est pris en compte.

Pour faire un résumé, on peut dire que les modèles de localisation à couverture multiple essaient de pallier les handicaps des modèles à couverture simple. Pour cela, les modèles de localisation à couverture multiple considérent le fait qu'un véhicule puisse se trouver indisponible au moment où la demande se réalise. Pour couvrir une telle situation, les modèles de localisation à couverture multiple essaient d'assurer une couverture double ou multiple. Cela nous permet d'avoir une sorte de robustesse dans le système [5].

2.3. Modèles probabilistes ou stochastiques

Les modèles de localisation à couverture multiple sont basés sur une hypothèse ce qui considère la présence d'une robustesse suffisante lorsque des demandes simultanées se réalisent. Cette robustesse repose sur l'utilisation de double couverture ou la couverture multiple des zones de demande. Ce fait, en soi-même est une amélioration par rapport aux modèles antérieurs (i.e., les modèles de localisation déterministes à couverture simple). Pourtant, qu'est-ce qu'il arrivera si

- la double couverture ne suffit pas pour assurer les demandes ?!
- la double couverture ne soit même pas nécessaire ?!

Ce sont les critiques posées aux modèles à couverture multiple. Certains auteurs ont essayé de pallier ces défauts en proposant des modèles dans lesquels les différentes sources d'incertitude liées aux services d'aides médicales urgentes sont, explicitement, introduites. Ce sont les modèles de localisation probabilistes ou stochastiques. Le but était de fournir une représentation plus fidèle de la réalité. Malgré tous les efforts, plusieurs hypothèses simplificatrices sont toujours nécessaires au développement de tels modèles et que diverses améliorations peuvent toujours y être apportées [5]. Divers modèles ont été proposés dans ce contexte. La principale différence entre ces modèles repose sur la façon de considérer les différentes sources d'incertitude dans chaque modèle.

2.3.1. *Modèles de localisation à couverture espérée*

Cette famille de modèles a pour objectif la maximisation de la couverture espérée. Ceci s'exprime en fonction du taux d'occupation des véhicules. Le taux d'occupation des véhicules est défini comme la probabilité de l'indisponibilité du véhicule pour répondre à un appel. De cette manière on essaie de tenir compte de l'incertitude associée à la satisfaction des demandes.
Erkut et al. ont réalisé une étude expérimentale sur les aspects stochastiques liés à la disponibilité des véhicules et au temps de déplacement à l'intérieur d'un modèle de localisation avec couverture maximale [19].
L'analyse de modèles a permis de montrer que, pour un nombre de véhicules donné, les solutions déterminées grâce aux modèles de localisation avec couverture espérée ont une meilleure performance par rapport aux solutions déterminées fournies par le modèle PLCM déterministe. Selon leur étude, le fait de considérer l'incertitude lors de la formulation des modèles de localisation présente donc des avantages certains [5, 19].
Daskin [13, 14] propose un modèle de localisation avec couverture maximale. Les hypothèses de son modèle sont les suivantes :

- tous les véhicules présentent le même taux d'occupation q qui est défini comme le temps total nécessaire pour répondre à tous les appels divisé par le temps total de disponibilité pour tous les véhicules.
- le taux d'occupation est indépendant de la localisation,
- chaque véhicule opère indépendamment (il n'y a pas de coopération entre les véhicules affectés aux différentes zones de demandes).

Ainsi, si la zone de demande i est couverte par k véhicules, la demande espérée couverte est donné par $E_k = a_i(1 - q^k)$ où q^k représente la probabilité que tous les véhicules soient occupés et a_i, le nombre de demandes associées à la zone de demande i. La contribution marginale du $k - ieme$ véhicule à la couverture des demandes placées en i est alors donnée par $E_k - E_{k-1} = a_i(1 - q)q^{k-1}$.
Soit :

y_{ik} : une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande i est couverte par au moins k véhicules,

x_j : le nombre de véhicules localisés en j.

Le problème de localisation avec couverture espérée maximale (PLCEM) ou maximal expected covering location problem (MEXCLP) proposé par Daskin se formule de la façon suivante :

PLCEM :

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{U} (1 - q)q^{k-1} a_i y_{ik} \tag{73}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq \sum_{k=1}^{U} y_{ik}, i = 1, \ldots, n, \tag{74}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \leq U, \tag{75}$$

$$y_{ik} \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,n, \quad k = 1,\ldots,U, \tag{76}$$

$$x_j \geq 0, entiere, j = 1,\ldots,m. \tag{77}$$

Il faut noter que :
- Le modèle PLCEM vise à maximiser la couverture espérée en considérant un nombre limité de véhicules.
- Contrairement au problème PLCM, la co-localisation des véhicules est ici possible.
- la solution du modèle est sensible à la variation de q.
- selon les expérimentations, pour les petites valeurs de q, la solution de PLCEM est équivalente à la solution de PLCM.

Plusieurs variantes du modèle PLCEM ont été proposés dans la littérature. Ils essaient d'apporter des modifications dans le modèle PLCEM :
- le modèle PLCEM-A (proposé par Batta et al. [4]) : la différence entre ce modèle et le modèle PLCEM repose sur le fait qu'il ne considère plus l'indépendence des véhicules. Pour cela le modèle contient un facteur correctif dans la fonction objectif basé sur la théorie des files d'attente [5].
- le deuxième modèle (proposé par batta et al. [4]) est basé sur le modèle de l'hypercube de Larson. Ce modèle permet de considérer la couverture des appels placés en attentes [5, 27, 28].
- Mandell [29] a proposé un modèle de localisation avec coverture espérée qui considère l'utilisation de deux types de véhicules ALS et BLS : un ALS peut assurer le même service qu'un BLS mais pas l'inverse. *Le modèle formulé par Mandell vise donc à maximiser le nombre espéré d'appels servis adéquatement suite à la localisation d'un nombre donné de véhicules de type ALS et BLS* [5, 29].

Dans le présent contexte, une zone de demande est servie adéquatement si un véhicule BLS et un véhicule ALS peuvent arriver sur les lieux de l'incident à l'intérieur d'un temps prescrit.

On suppose que chaque véhicule ALS peut rendre les services BLS. Soit $r^A \geq r^B$, la probabilité qu'une zone de demande i puisse être servie adéquatement dépend du :
- nombre h de véhicule **ALS** disponibles dans un temps inférieur à r^A,
- nombre k de véhicule **ALS** disponibles dans un temps inférieur à r^B,
- et du nombre l de véhicule **BLS** disponibles dans un temps inférieur à r^B.

En utilisant la théorie de files d'attente, Mandell a calculé la probabilité associée, θ_{ihkl}.

Le problème consiste à localiser U^A véhicules du type ALS et U^B véhicules du type BLS dans les sites (points d'attente).

Soit :

x_j^A : le nombre des véhicules ALS localisés au site j,

x_j^B : le nombre des véhicules BLS localisés au site j,
y_{ihkl} : une variable binaire qui vaut 1 si et seulement si :
- h véhicules **ALS** sont localisés dans un endroit disponible dans un temps inférieur à r^A de la demande i,
- k véhicules **ALS** sont localisés dans un endroit disponible dans un temps inférieur à r^B de la demande i,
- l véhicules **BLS** sont localisés dans un endroit disponible dans un temps inférieur à r^B de la demande i.

$W_i^A = \{j : t_{ij} \leq r^A\}$,
$W_i^B = \{j : t_{ij} \leq r^B\}$,
Les indices de la variable y_{ihkl} varient de la façon suivante :
- h : de 0 à $h_i = min\{U^A, |W_i^A|\}$
- k : de 0 à $k_i = min\{U^A, |W_i^B|\}$
- l : de 0 à $l_i = min\{U^B, |W_i^B|\}$

Le modèle Two-Tiered (TTM) de Mandell se résume ainsi :

TTM :

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{h_i} \sum_{k=0}^{k_i} \sum_{l=0}^{l_i} d_i \theta_{ihkl} y_{ihkl} \tag{78}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{h=1}^{h_i} h \sum_{k=0}^{k_i} \sum_{l=0}^{l_i} y_{ihkl} \leq \sum_{j \in W_i^A} x_j^A, i = 1, \ldots, n, \tag{79}$$

$$\sum_{k=1}^{k_i} k \sum_{h=k}^{h_i} \sum_{l=l_0}^{l_i} y_{ihkl} \leq \sum_{j \in W_i^B} x_j^A, i = 1, \ldots, n, \tag{80}$$

$$\sum_{l=1}^{l_i} l \sum_{h=1}^{h_i} \sum_{k=0}^{k_i} y_{ihkl} \leq \sum_{j \in W_i^B} x_j^B, i = 1, \ldots, n, \tag{81}$$

$$\sum_{h=1}^{h_i} \sum_{k=0}^{k_i} \sum_{l=0}^{l_i} y_{ihkl} \leq 1, i = 1, \ldots, n, \tag{82}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^A \leq U^A, \tag{83}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^B \leq U^B, \tag{84}$$

$$y_{ihkl} \in \{0,1\} : i = 1, \ldots, n, 0 \leq h \leq h_i, 0 \leq k \leq k_i, 0 \leq l \leq l_i, \tag{85}$$

$$x_j^A, x_j^B \in \{0,1\} : j = 1, \ldots, m. \tag{86}$$

---

où $l_0 = 1$ si $k = 0$ et $l_0 = 0$ si $k > 1$.
Les contraintes (79), (80) et (81) veulent dire que les valeurs prises par les variables y_{ihkl} sont compatibles avec le nombre des véhicules localisés (types ALS et BLS).
Les contraintes (82) veulent dire qu'une seule combinaison de h, k et l est possible pour chaque point de demande i.

2.3.2. *Modèles de programmation stochastique avec contraintes probabilistes*

Jusqu'à présent, on a présenté des modèles de localisation à couverture espérée visant à maximiser la couverture espérée. Pour cela on a tenu en compte la probabilité qu'un véhicule puisse servir ou non une zone de demande à l'intérieur d'un délai prescrit. Une approche aussi existe dans la littérature. Cette approche est nommée *la programmation stochastique avec contraintes probabilistes*. Elle consiste à considérer l'incertitude lors de la formulation des contraintes de façon à assurer la fiabilité du système. Cela se fait par l'introduction des contraintes probabilistes imposant un niveau de fiabilité donné. Dans le cas du déploiement des véhicules ambulanciers, les modèles forcent *généralement* le respect des contraintes de couverture.
Revelle et Hogan propose le modèle de localisation avec disponibilité maximal (PLDM) ou maximal availability location problem (MALP) qui en fait est une version probabiliste du PLCM (problème de localisation avec couverture maximale) [36].
Le but du modèle est de maximiser la population couverte avec un niveau de fiabilité donné. Le modèle garantit alors que chaque demande puisse trouver au moins un véhicule disponible à l'intérieur du délai prescrit T, et ce avec une fiabilité α.
Soit :
q le taux d'occupation de véhicule (identique pour tous les véhicules),
$l = \sum_{j \in N_i} x_j$ (autrement dit l est le nombre de véhicules pouvant assurer la couverture de demandes en i)
Dans ce cas $1 - q^l$ représente la probabilité qu'au moins un véhicule soit disponible pour répondre à une demande placée en i étant donné l véhicules pour en assurer la couverture.
Le modèle **MALP** souhaite que $1 - q^l \geq \alpha$.

La contrainte de couverture proposée s'écrit sous la forme : $\sum_{j \in N_i} x_j \geq b$ où $b = \lceil \frac{log(1-\alpha)}{log(q)} \rceil$.

Soit :
y_{ik} : une variable binaire qui vaut 1 si le point de demande i est couvert par au moins k véhicules,
x_j : une variable binaire qui vaut 1 si un véhicule est localisé au site j,
a_i : le nombre de demande associées à la zone de demande i,
U : le nombre total de véhicules à localiser.
Le **PLDM 1** se formule comme suit :

PLDM 1 :

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i y_{ib} \tag{87}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{k=1}^{b} y_{ik} \leq \sum_{j \in N_i} x_j, i = 1, \ldots, n, \tag{88}$$

$$y_{i,k} \leq y_{i,k-1}, i = 1, \ldots, n, k = 2, \ldots, b, \tag{89}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = U, \tag{90}$$

$$x_j, y_{ik} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, U, \tag{91}$$

Le **PLDM1** essaie de maximiser la population servie par b véhicules (87) où b est le nombre de véhicules requis afin de garantir que chaque demande puisse trouver au moins un véhicule disponible à l'intérieur de T au moment où la demande se réalise et ce, avec une fiabilité α. Il faut noter que la co-localisation des véhicules n'est pas possible (91) et la localisation indépendante de U véhicules est donc considérée (90).
La deuxième version du **PLDM** considère la relaxation de l'hypothèse du taux d'occupation identique. Pour cela un taux d'occupation q_i est associé à la zone de demande i. Le modèle **PLDM2** est similaire au modèle **PLDM1** à l'exception que :

- **PLDM2** considère b_i au lieu de b,
- x_j prend des valeurs entières plutôt que binaires,
- et par conséquent la co-localisation des véhicules est possible.

Le défaut du **PLDM2** est du fait qu'on ne peut pas savoir les valeurs de q_i en avance parce que ce sont les outputs du modèles.

Revelle et Hogan [35] ont formulé une version probabiliste du **PLCT** soit problème de localisation avec couverture totale probabiliste (**PLCTP**) ou probabilistic location set covering problem (**PLSCP**).
PLCTP :

- vise à minimiser le nombre de véhicules à localiser,
- assure que chaque demande puisse trouver au moins un véhicule disponible au moment où celui-ci est placé,
- assure la disponibilité de véhicule avec un niveau de fiabilité α.

De la même manière que PLDM2, on calcule les b_i à partir de q_i et α et on aura la formulation suivante :

PLCTP :

$$\min \sum_{j=1}^{m} x_j \tag{92}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq b_i, i = 1, \ldots, n, \tag{93}$$

$$x_j \geq 0, entiere, j = 1, \ldots, m. \tag{94}$$

Les modèles PLCTP et PLDM considèrent l'indépendence du taux d'occupation des véhicules. Cette hypothèse peut engendrer un impact négatif sur l'estimation du taux d'occupation et donc sur l'évaluation de la couverture. La théorie de file d'attente a été utilisée afin de proposer des généralisations des modèles PLCTP et PLDM afin d'introduire des modèles plus fidèles à la réalité [5].
Jusqu'à maintenant, la plupart des modèles présentés considéraient la disponibilité des véhicules comme principale source d'incertitude, cela considère indirectement l'incertitude reliée à la réalisation de la demande. Pourtant la source d'incertitude peut être considérée directement le caractère aléatoire des demandes d'aides médicales urgentes. Dans le cet esprit, Bell et Lin ont proposé le modèle **REL-P** [3].
Le modèle impose une limite supérieure quant à la probabilité r_i qu'aucun véhicule ne soit disponible pour répondre à l'appel au moment où celui-ci est placé, c'est-à-dire que $r_i \leq 1-\alpha$ où α représente le niveau de fiabilité recherché. De cette façon, la fiabilité du service à chaque point de demande est assurée. Autrement dit, les auteurs souhaitent formuler une contrainte qui borne la probabilité que le nombre d'appels reçu à l'intérieur d'une région donnée soit plus grand que le nombre de véhicules disponibles afin de couvrir cette même région, et ce, pour une période de temps donnée.
Soit :

x_{jk} : une variable binaire qui vaut 1 si k véhicules sont localisés au site j,

w_{jk} : les coûts fixes et les coûts variables associés à l'ouverture du site j et à la localisation de k véhicules en j,

N_i : l'ensemble des sites potentiels pouvant assurer la couverture d'une zone de demande i à l'intérieur d'un délai prescrit T,

M_j : l'ensemble des zones de demandes couvertes par le site j à l'intérieur de T,

$D(j)$: le nombre d'appels qui se réalisent en M_j,

$a_{jk} = -log[P(D(j) \geq k)]$,

$b_i = -log(1-\alpha)$.

Le modèle REL-P se formule de la façon suivante :

REL-P :

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{U_j} w_{jk} x_{jk} \tag{95}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{k=1}^{U_j} x_{jk} \leq 1, j = 1, \ldots, m, \tag{96}$$

$$\sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{U_j} a_{jk} x_{jk} \geq b_i, i = 1, \ldots, n, \tag{97}$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, U_j. \tag{98}$$

---

l'objectif de **REL-P** est de minimiser l'ensemble des coûts (95) de façon à garantir un service avec un niveau de fiabilité donné (97). La co-localisation est possible.

Les défauts du modèle REL-P :

- • Le modèle REL-P fait un mixte de différents coûts,
- • Le modèle ne tient pas compte de variations de demandes au cours du temps,

Beraldi et al. [6] ont proposé un modèle de localisation et dimensionnement qui est dans le même esprit que le modèle de Ball et Lin [3]. Le modèle de Beraldi et al. s'intéresse à la localisation et au dimensionnement d'une flotte d'ambulances. Dans ce modèle l'aspect aléatoire est associé, explicitement, aux demandes de service. De plus, selon l'hypothèse du modèle, haque véhicule peut servir au plus une seule demande. De manière similaire aux modèles de couverture, le modèle suppose qu'une localisation ne paut être candidate pour fournir un service sauf si elle est située à l'intérieur d'un temps prédéterminé T. Afin de présenter le modèle probabiliste, les auteurs présentent d'abord un modèle déterministe sous-jacent. Ceci sert de base à l'élaboration du modèle probabiliste. Dans ce qui suit, on suivra leur approche.

Soit :

y_j : une variable binaire qui vaut 1 si le site j est ouvert,

x_{ij} : le nombre de véhicules localisés en j servant à desservir la zone de demande i,

a_i : les demandes de service associées à la zone de demande i,

p_j : la limite sur le nombre de véhicules à localiser en j,

M_j : l'ensemble des zones de demande pouvant être couvertes par j,

N_i : l'ensemble des sites pouvant assurer la couverture de i à l'intérieur de T,

le modèle déterministe proposé se définit de la façon suivante :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} f_j y_j \tag{99}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq a_i, i = 1, \ldots, n, \tag{100}$$

$$\sum_{i \in M_j} x_{ij} \leq U_j y_j, j = 1, \ldots, m, \tag{101}$$

$$x_{ij} \geq 0, entiere, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m, \tag{102}$$

$$y_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, m. \tag{103}$$

---

le but du modèle :
- minimisation des coûts associés à l'ouverture des sites et à l'allocation des demandes aux véhicules (99),
- couverture de chaque demande a_i à l'intérieur de T (100),
- imposition d'une limite sur le nombre de véhicules pouvant localisés à chaque site j (101).

Pour passer de ce modèle à un modèle stochastique, les contraintes (100) sont remplacées par

$$P(\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq \zeta_i, i = 1, \ldots, n) \geq \alpha, \tag{104}$$

où ζ_i représente la variable aléatoire associée aux demandes placées en i. En utilisant cette contrainte, on souhaite respecter les contraintes liées à la satisfaction de la demande (100) avec un niveau de fiabilité α.
Contrairement au modèle REL-P qui vise une fiabilité locale, la contrainte (104) considère une fiabilité globale.
Le modèle de Beraldi et al. peut être rendu sous forme d'un modèle linéaire en nombres entiers [6, 16, 17].

Une approche adoptée par Alsalloum et Rand [1] consiste à l'intégration simultané de la couverture espérée et contraintes probabilistes. Les auteurs ont défini les paramètres P_{ij} comme la probabilité d'atteindre une zone de demande i à partir d'une localisation j à l'intérieur d'un temps prescrit. Ceci dépend, évidemment, au temps de déplacement entre chaque paire (i, j). La probabilité P_{ij} intervient alors dans le calcul de la couverture espérée ce qui, selon les auteurs, permet d'améliorer l'évaluation de cette dernière, notamment lorsque le niveau d'agrégation est important [1, 5].
Le modèle de Alsalloum et Rand [1] vise :
- dans un premier temps, à sélectionner les sites à utiliser de façon à maximiser la couverture espérée et,
- dans un deuxième temps, à déterminer le nombre de véhicules à placer en chacune des localisations sélectionnées de façon à ce que chaque demande puisse trouver au moins un véhicule disponible.

La disponibilité des véhicules est considérée par l'intermédiaire d'une contrainte probabiliste où le nombre minimum de véhicules requis pour atteindre un niveau de fiabilité adéquat est obtenu grâce à des notions issues de la théorie des files d'attente.
Soit :

P_{ij} : la probabilité d'atteindre une zone de demande i à partir d'une localisation j,

ρ : est une borne prédéterminée,

y_{ij} : une variable binaire qui vaut 1 lorsque $P_{ij} \geq \rho$ et lorsque la localisation j est celle pour laquelle la distance par rapport à i est la plus petite,

x_{jK} : une variable binaire qui vaut 1 si exactement K véhicules sont positionnés en j,

λ_i : le taux d'arrivée des demandes en i,

r_K : une valeur frontière du taux d'arrivée qui requiert l'ajout d'un véhicule (de K à $K+1$) déterminée par la théorie des files d'attente,

a_i : la portion de la demande totale qui se réalise en i,

P_0 et P_1 : les poids associés aux objectifs,

d_0^- et d_j^+ représentent les déviations par rapport aux objectifs (voir le modèle).
Le modèle de Alsalloum et Rand se formule comme la suite :

$$\min P_0 d_0^- + P_1 \sum_{j=1}^{m} d_j^+ \tag{105}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i P_{ij} y_{ij} + d_0^- = 1, \tag{106}$$

$$\sum_{K=1}^{U_j} r_K x_{jK} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{ij} - d_j^+ = 0, j = 1, \ldots, m, \tag{107}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leq 1, i = 1, \ldots, n, \tag{108}$$

$$\sum_{K=1}^{U_j} x_{jK} \leq 1, j = 1, \ldots, m, \tag{109}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{K=1}^{U_j} x_{jK} = U_{total}, \tag{110}$$

$$y_{ij}, x_{jK} \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m, K = 1, \ldots, U_j. \tag{111}$$

Le modèle :

- (105) : vise à minimiser la non-couverture espérée de la population de même que le nombre de véhicules à localiser,
- les déviations d_0^- et d_j^+ sont considérées au sein des contraintes (106) et (107),
- la contrainte (108) affecte chaque zone de demande au site le plus proche, et celui-ci est le site qui possède la probabilité la plus forte pour arriver à cette zone de demande dans le délai prescrit. Sinon, la demande ne sera pas couverte.
- la contrainte (109) et (110) assure le respect de la limite p_j quant au nombre de véhicules à localiser en j et la localisation d'un nombre total.

Beraldi et Bruni [7] ont adopté une approche différente de celles que nous avons présentées jusqu'à ici. Leur modèle est plutôt issu de la *programmation stochastique avec fonction de recours*. Il s'agit de rares modèles de ce genre qui sont appliqués au déploiement des ambulances. D'une manière similaire à [6], ce modèle considère l'aspect aléatoire associé aux demandes de service de même que l'affectation réelle des véhicules aux demandes [5–7].

Il considère deux étapes de décision :
- la première est associée à la localisation des sites,
- la deuxième est associée à l'allocation des véhicules aux demandes suite à leur réalisation.

Soit :

x_j : le nombre de véhicules localisés au site j,

z_j : une variable binaire qui vaut 1 si le site j est utilisé,

$a(w)$: le vecteur aléatoire des valeurs entières associées à la réalisation de la demande (quantité demandée),

$y_{ij}(w)$: une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande i est affectée aux véhicules localisés en j lorsque le vecteur aléatoire $a(w)$ se réalise,

c_j : le coût associé à la localisation d'un véhicule localisé en j,

f_j : le coût associé à l'utilisation du site j,

d_{ij} : la distance ou le coût pour servir une demande qui se réalise en i à partir du site j,

M_j : l'ensemble des zones de demande pouvant être couvertes par le site j à l'intérieur de la distance ou du délai prescrit T,

N_i : l'ensemble des sites pouvant assurer la couverture de la zone de demande i à l'intérieur de T.

Le modèle s'écrit comme suit :

$$\min \sum_{j=1}^{m} (c_j x_j + f_j z_j) + E_w[Q(x, z, w)] \tag{112}$$

sous les contraintes :

$$x_j \leq p_j z_j, j = 1, \ldots, m, \tag{113}$$

$$z_j \in \{0, 1\}, x_j \quad entiere, j = 1, \ldots, m, \tag{114}$$

$$Q(x, z, w) = min_y \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} y_{ij}(w), \tag{115}$$

$$\sum_{i \in M_j} a_i(w) y_{ij}(w) \leq x_j, j = 1, \ldots, m, \tag{116}$$

$$\sum_{j \in N_i} y_{ij}(w) \geq 1, i = 1, \ldots, n, \tag{117}$$

$$y_{ij}(w) \leq x_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m, \tag{118}$$

$$y_{ij}(w) \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m, \tag{119}$$

La fonction objectif est composée de deux termes [5] :
- un premier terme associé à la minimisation des coûts de localisation (112),
- un second terme associé à la minimisation de la fonction de recours, c'est-à-dire à la minimisation des coûts liés à l'affectation des demandes aux différents véhicules (115).

Les contraintes de première étape exigent qu'un nombre maximum de véhicules peut être affecté à un site donné comme j (113). Les contraintes associées au recours visent, quant à elles, la présence de suffisamment d'ambulances stationnées en j pour qu'on puisse les utiliser afin de desservir les demandes qui y sont affectées et qui se sont réalisées (116), et en plus, à ce qu'une demande qui se réalise soit affectée à au moins un véhicule (ambulance) (117). De plus, une demande qui se réalise en i ne peut être affectée à un véhicule localisé en j que si le site j est utilisé (118) [5].

3. Modèles multi-périodes et dynamiques

Dans cette section on va présenter les modèles multi-périodes et dynamiques.

3.1. Modèles (multi-périodes et/ou dynamiques) déterministes à couverture simple

Carpentier [9] a proposé un modèle déterministe pour le redéploiement multi-période des véhicules ambulanciers.
- Le modèle considère explicitement le déplacement des véhicules entre les périodes en intégrant dans la fonction objectif un terme qui vise à minimiser les coûts associés au déplacement des véhicules entre les périodes.
- Le modèle considère non seulement la localisation des véhicules, mais également l'affectation réelle des véhicules aux zones de demande.
- Le nombre minimal de véhicules f_i^t à affecter à une zone de demande i durant la période t est déterminé afin de tenir compte de l'affectation multiple des véhicules. En considérant ainsi f_i^t, plus d'une demande peuvent être affectées à un véhicule au cours de la période de temps considérée. Des périodes de temps plus longues pourront donc être considérées.

Soit :

x_{ij}^t : une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande i est couverte par un véhicule localisé au site j à la période t,

z_{jl}^t : une variable binaire qui vaut 1 si le véhicule l est localisé au site j à la période t,

y_{jkl}^t une variable binaire qui vaut 1 si le véhicule l est déplacé du site j au site k ($j \neq k$) au début de la période t,

d_{ij} : la distance à parcourir pour aller de i à j,

a_i^t : le nombre moyen d'appels placés en i à la période t,

U^t : le nombre de véhicule disponibles à la période t,

N_i : l'ensemble des sites pouvant couvrir la zone de demande i à l'intérieur d'une distance pré-définie S.
Le modèle proposé par Carpentier se formule de la façon suivante :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} \sum_{t=1}^{T} (\frac{a_i^t}{f_i^t} d_{ij} x_{ij}^t) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} \sum_{l=1}^{U^t} d_{jk} y_{jkl}^t \tag{120}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij}^t = f_i^t, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \tag{121}$$

$$\sum_{l=1}^{U^t} z_{jl}^t \leq 1, j = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T, \tag{122}$$

$$\sum_{j=1}^{m} z_{jl}^t = 1, l = 1, \dots, U^t, t = 1, \dots, T, \tag{123}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{U^t} z_{jl}^t = U^t, t = 1, \dots, T, \tag{124}$$

$$x_{ij}^t \leq \sum_{l=1}^{U^t} z_{jl}^t, j \in N_i, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \tag{125}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^t \leq K, j = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T, \tag{126}$$

$$y_{jkl}^t \geq z_{kl}^t + z_{jl}^{t-1} - 1, k \in \{J : j \neq k\}, t = 2, \dots, T, j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, U^t, \tag{127}$$

$$y_{jkl}^1 \geq z_{kl}^1 + z_{jl}^s - 1, k \in \{J : j \neq k\}, j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, U^t, \tag{128}$$

$$x_{ij}^t, y_{jkl}^t, z_{jl}^t \in \{0, 1\}. \tag{129}$$

L'objectif du modèle consiste, à la fois, à
- minimiser les coûts associés à la distance parcourue pour servir les demandes,
- minimiser les coûts associés au redéploiement entre les périodes.

Les contraintes à respecter :

(121) : Chaque zone de demande doit être couverte par le nombre requis de véhicules.

(122) : la co-localisation des véhicules est interdite.

(123) : chaque véhicule doit être affecté à un site.

(124) : à chaque période t, on peut localiser un nombre donné de véhicules U^t, où U^t est tel que chaque zone de demande peut être couverte par au moins un véhicule.

(125) et (126) : chaque véhicule peut couvrir un nombre limité K de zones de demande.

Enfin, les contraintes(127) et (128) déterminent le déplacement des véhicules entre deux périodes consécutives.

3.2. Modèles (multi-périodes et/ou dynamiques) déterministes à couverture multiple

Gendreau et al. ont proposé un modèle dynamique [21] qui vise explicitement l'aspect dynamique du problème de relocalisation (redéploiement) des ambulances. Le modèle est basé sur le modèle MDS [20] des auteurs. Le modèle dynamique de Gendreau est nommé $PR{-}t$ (Problème de Redéploiement (relocalisation) au temps t) [21].

Le but du modèle : consiste à la fois :

- maximiser la population couverte deux fois à l'intérieur d'un délai prescrit,
- minimiser les coûts associés au relocalisation (redéploiement).

Gendreau et al. ont proposé un terme de pénalité pour tenir compte des coûts de relocalisation des ambulances. Ce terme de pénalité prend en compte l'historique des mouvements de relocalisation des ambulances et il est intégré à la fonction objectif. Ce terme de pénalité a pour le but :

- décourager les déplacements fréquents,
- décourager les distances de redéploiement trop longues,
- décourager les aller-retour entre un même poste d'attente.

Concernant ce terme de pénalité, il faut que sa valeur soit actualisée à toutes les périodes.

Reprenons les même notations que le modèle MDS :

Soit :

y_i une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande i est couverte **une fois**.

u_i : une variable binaire qui vaut 1 lorsqu'une zone de demande i est couverte **deux fois**.

U_j : la limite sur le nombre de véhicules à localiser au site j,

N_i : l'ensemble des sites potentiels pouvant assurer la couverture de la zone de demande i à l'intérieur d'une distance ou d'un délai prescrit S.

M_i : l'ensemble des sites potentiels pouvant assurer la couverture d'une zone de demande à l'intérieur d'une distance ou d'un délai prescrit T ($T > S$),

et on y ajoute :

y_{jl} : une variable binaire qui vaut 1 si le véhicule l est localisé en j,

M^t_{jl} : le terme de pénalité associé à la re-localisation du véhicule l de sa localisation actuelle vers la localisation j au temps t,

le modèle $PR - t$ se formule comme suit :

$PR - t$ **:**

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i u_i - \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{U} M^t_{jl} y_{jl} \tag{130}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j\in M_i}\sum_{l=1}^{U} y_{jl} \geq 1, i = 1,\ldots,n, \tag{131}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{132}$$

$$\sum_{j\in N_i}\sum_{l=1}^{U} y_{jl} \geq u_i + y_i, i = 1,\ldots,n, \tag{133}$$

$$u_i \leq y_i, i = 1,\ldots,n, \tag{134}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jl} = 1, l = 1,\ldots,U, \tag{135}$$

$$\sum_{l=1}^{U} y_{jl} \leq U_j, j = 1,\ldots,m, \tag{136}$$

$$u_i, y_i \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,n, \tag{137}$$

$$y_{jl} \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,m, l = 1,\ldots,U. \tag{138}$$

D'une manière similaire, le modèle "**Min-Max Charge**" [32] peut être généralisé afin de devenir un modèle dynamique. Pour cela, il nous suffit d'introduire les termes de pénalité (sur les mouvements des véhicules) dans modèle ; ce qui deviendra comme suit :

Min-Max Charge-dynamique :

$$\min \quad t - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{|K|} M_{jk}^{t} y_{jk} \tag{139}$$

sous les contraintes :

$$t \geq \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \quad : k = 1,\ldots,|K|, \tag{140}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jk} = 1 \quad : k = 1,\ldots,|K|, \tag{141}$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} x_{ki} = d_i \quad : i = 1,\ldots,n, \tag{142}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} y_{jk} \geq \frac{1}{d_i} x_{ki} \quad : i = 1,\ldots,n; k \in K, \tag{143}$$

$$y_{jk} \in \{0,1\} \quad : j = 1,\ldots,m; k \in K, \tag{144}$$

$$x_{ki} \geq 0 \quad : i = 1,\ldots,n; k \in K, \tag{145}$$

$$t \in \mathbb{R}. \tag{146}$$

D'autre modèle de relocalisation dynamique des ambulances a été proposé par Andersson et Värbrand [2]. Ils ont proposé la notion de **preparedness** afin de mesurer la performance du système. Ils définissent **preparedness** comme **la capacité du système à répondre aux demandes présentes et futures** [2, 5].

Soit :

c_j : le poids associé aux demandes placées en j,

L_j : le nombre de véhicules contribuant au calcul de la *preparedness* (généralement les L_j véhicules les plus proches),

t_j^l : le temps de déplacement du véhicule l vers la localisation j tel que :

$t_j^1 \leq t_j^2 \leq \cdots \leq t_j^{L_j}$,

γ^l : la facteur associé à la contribution du véhicule l tel que :

$\gamma^1 > \gamma^2 > \cdots > \gamma^{L_j}$,

La *preparedness* pour la zone de demande j, est notée par ϱ_j et est donnée par la formule suivante :

$$\varrho_j = \frac{1}{c_j} \sum_{l=1}^{L_j} \frac{\gamma^l}{t_j^l}. \tag{147}$$

Le niveau de preparedness est vérifié régulièrement. Si niveau de *preparedness* baisse en-dessous d'une valeur pré-définie, les aambulances sont relocalisées. Ce modèle est intitulé DYNAROC. On essaie d'augmenter la *preparedness* en relocalisant une ou plusieurs ambulances vers les zones qui souffrent du niveau bas de la *preparedness*.

Le but du modèle DYNAROC : est de minimiser le temps maximal de déplacement entre les postes d'attente des véhicules re-localisés.

Soit :

P_{min} : une limite imposée quant au niveau de *preparedness* à atteindre suite à la relocalisation (dans le travail original d'Andersson et al. ce paramètre vaut 0.923).

t_j^k : le temps de déplacement du véhicule k pour atteindre la zone j,

x_j^k : une variable binaire qui vaut 1 si le véhicule k est relocalisé vers le site j,

N_k : l'ensemble des zones pouvant être atteintes par le véhicule k à 'intérieur d'un délai prescrit T,

M : le nombre maximal de véhicules pouvant être relocalisés,

U : le nombre total des véhicules,

Le modèle s'écrit comme suit :

DYNAROC :

$$\min z \tag{148}$$

sous les contraintes :

$$z \geq \sum_{j \in N_k} t_j^k x_j^k, k = 1, \ldots, U, \tag{149}$$

$$\sum_{j \in N_k} x_j^k \leq 1, k = 1, \ldots, U, \tag{150}$$

$$\sum_{k=1}^{U} \sum_{j \in N_k} x_j^k \leq M, \tag{151}$$

$$\frac{1}{c_j} \sum_{l=1}^{L_j} \frac{\gamma^l}{t_j^l(x)} \geq P_{min}, j = 1, \ldots, n, \tag{152}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n. \tag{153}$$

Où $t_j^l(x)$ est une fonction de x (celui-là est un vecteur de x_j^k).

Les contraintes (149) et (150) visent à limiter le temps de déplacement des véhicules relocalisés, de même que le nombre de véhicules pouvant être relocalisés.

La contrainte (151) limite le nombre total de relocalisations.

3.3. Modèles (multi-périodes et/ou dynamiques) probabilistes ou stochastiques à couverture simple

Le premier modèle multi-période pour le relocalisations des ambulances a été formulé par Repede et Bernardo en 1994 [34]. Le problème de **localisation multi-période avec couverture espérée maximale (PLCEM-MP)** ou **maximal expected coverage location model with time variation (TIMEXCLP)**. Le modèle proposé est une variante multi-période du PLCEM qui a été proposé par Daskin [13, 14].

Le but du modèle PLCEM-MP : est de maximiser la couverture espérée. L'aspect multi-période du modèle se présente dans le fait qu'il tient compte **la variation de la demande** et **la variation du nombre d'ambulances à localiser** et tout cela selon la période de temps considérée [5, 34].

Le défaut du modèle PLCEM-MP : dans chaque modèle multi-période, il faut tenir compte **explicitement** des efforts associés à la relocalisation des ambulances entre les périodes, pourtant le modèle PLCEM-MP n'offre pas cette possibilité.

La formulation du PLCEM-MP est très similaire à la celle du modèle original [5]. La seule différence est dans un indice qui est ajouté pour tenir compte des différentes périodes de temps.

Rajagopalan et al. [33] ont proposé un modèle dynamique qui est en principe une variante multi-période du modèle PLCTP [35], le modèle s'intitule **dynamique de localisation avec couverture totale disponible (DLCTD)** ou **dynamic available coverage location model (DACL)**.

Le but du modèle DLCTD : le modèle vise à minimiser le nombre de véhicules à localiser. La localisation propose une couverture des zones de demande en garantissant un niveau de fiabilité donné pour chaque zone. Et ceci est fait en considérant plusieurs périodes de temps. De plus, le modèle DLCTD tient compte d'un facteur correctif dans les contraintes probabilistes qui permet de garantir la fiabilité du système.

Le défaut du modèle DLCTD : ce modèle a le même défaut que le PLCEM-MP, c'est-à-dire qu'il n'impose pas de contraintes particulières pour tenir compte du déplacement des ambulances entre les périodes.

Remarque : le modèle DLCTD utilise des notions de files d'attente.

Gendreau et al. [22] ont proposé un autre modèle pour la relocalisation dynamique par une nouvelle approche similaire à celle de Kolesar et Walker [5, 26]. L'approche cherche à déterminer **a priori** tous les plans de relocalisation en fonction de tous les états possibles du système ! Cert, pour que cette approche soit envisageable, il faut que le nombre d'états possibles soit petit, sinon ce ne sera pas utilisable.

Le but du modèle : le problème de relocalisation maximale espérée (**PRME**) ou maximal expected relocation problem (**MECRP**) essaie de maximiser la couverture espérée à l'intérieur d'un délai prescrit det ce, pour tous les états du système où l'état du système est représenté par le nombre de véhicules disponibles [5,22]. De plus, le **PRME** impose une limite sur le nombre de véhicules qui peuvent être relocalisés entre les états.

Soit :

a_i : la densité de demandes à la zone de demande i. (a_i peut correspondre à la densité de population),

q_k : la probabilité d'être dans l'état k, où $k = 1, \dots, U$ où U est le nombre total de véhicules (autrement dit, q_k est la probabilité d'avoir k véhicules disponibles),

x_{jk} : une variable binaire qui vaut 1 si un véhicule est localisé en j à l'état k,

y_{ik} : une variable binaire qui vaut 1 si la zone de demande i est couverte par au moins un véhicule à l'état k,

u_{jk} : une variable binaire qui vaut 1 si la localisation j cesse d'être utilisée lorsqu'on passe de l'état k à l'état $k+1$,

α_k : le nombre maximal de changements qui peuvent être effectués lors du passage du système de l'état k à l'état $k+1$.

Le modèle **PRME** se formule comme suit :

PRME :

$$\max \sum_{k=1}^{U} \sum_{i=1}^{n} a_i q_k y_{ik} \tag{154}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} x_{jk} \geq y_{ik}, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, U, \tag{155}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{jk} = k, k = 1, \dots, U, \tag{156}$$

$$x_{jk} - x_{j,k+1} \leq u_{jk}, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, U-1, \tag{157}$$

$$\sum_{j=1}^{m} u_{jk} \leq \alpha_k, k = 1, \dots, U-1, \tag{158}$$

$$x_{jk} \in \{0,1\}, u_{jk} \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,m, k = 1,\ldots,U, \tag{159}$$
$$y_{ik} \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,n, k = 1,\ldots,U. \tag{160}$$

Les contraintes (157) et (158) visent à contrôler les changements effectués (le nombre de véhicules α_k pouvant être relocalisés) lors du passage du système d'un état à l'autre.

3.4. Modèles (multi-périodes et/ou dynamiques) probabilistes (stochastiques) à couverture multiple

Schmid et Doerner [38] ont proposé un modèle multi-période (Modèle MDS multi-période (**MDS-m**)) vise qui est basé sur le modèle MDS de Gendreau et al. D'une manière similaire au modèle MDS, le modèle proposé par Schmid et Doerner vise à maximiser la couverture des demandes par deux véhicules à l'intérieur de deux délais prescrit.

L'objectif est de maximiser les demandes couvertes par 2 véhicules dans une rayon de r_1 à chaque période $t \in \mathcal{T}$. Les K véhicules sont localisés de façon que toutes les demandes soient visitées dans r_2 minutes et $\alpha\%$ (tel que $0 < \alpha < 1$) des demandes soient visitées dans r_1 minutes ($r_1 < r_2$) et ceci, à chaque période $t \in \mathcal{T}$ (où $\mathcal{T} = \{1,\ldots,T\}$).

Les particularités du modèle :
- le modèle est multi-période,
- couverture double,
- le modèle essaie de contrôler le nombre des relocalisations,
- le modèle essaie d'intégrer la variation de temps de parcours.

Les défauts du modèle :
- le modèle ne considère pas que le nombre de demandes change au cours du temps (les L_i),
- le modèle n'a pas de contrainte pour limiter les relocalisation (les variables r^t_{ij}),
- le modèle contient beaucoup de variables binaires et entières,
- le modèle risque de ne pas être réalisable en pratique.

Soit :
- $x^t_{ij} \in \{0,1\}$: si la demande i est couverte par un véhicule localisé au site j à la période t,
- $x^t_{jk} \in \{0,1\}$: si l'ambulance k est localisée au site j à la période t,
- $x^{\lambda,t}_i \in \{0,1\}$: si la demande i est couverte λ fois à la période t.
- y^t_j : le nombre de véhicules localisés au site j à la période t,
- L_i : la densité de demande au point i,
- U : le nombre total des véhicules,
- U_j : la limite sur le nombre des véhicules localisés au site j,
- ω : un paramètre pour pouvoir intégrer la densité de population de la zone de demandes i, (pour dire qu'un véhicule peut couvrir un nombre raisonnable (ω) d'habitants.)

- $\mathcal{W}_i^{\lambda,t} := \{j \in \mathcal{W} : T_{ij}^t \leq r_\lambda; \lambda = 1,2\}$: l'ensemble des sites qui peuvent accéder à la demande i dans r_λ minutes à la période t. On peut avoir une définition similaire pour $\mathcal{V}_j^{\lambda,t}$.
- r_{j_1,j_2}^t : le nombre des véhicules qui sont re-localisés de la base j_1 à la base j_2 dans la fenêtre de temps $[t, t+1]$.
- r_{j_1,j_2}^T : le nombre des véhicules qui sont re-localisés de la base j_1 à la base j_2 entre les instants 1 et T (la fin de la période).

Un paramètre β est utilisé pour pénaliser les relocalisations successives d'un même véhicule.

Le modèle **MDS-m** de Schmid et Doerner se formule comme suit :

MDS-m :

$$\max \sum_{t \in \mathcal{T}} \left(\sum_{i \in \mathcal{V}} L_i x_i^{2,t} - \beta \sum_{j_1, j_2 \in \mathcal{W}} r_{j_1,j_2}^t \right) \tag{161}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in \mathcal{W}_i^{2,t}} y_j^t \geq 1 \quad : \forall i \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T}, \tag{162}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} L_i x_i^{1,t} \geq \alpha \sum_{i \in \mathcal{V}} L_i \quad : \forall t \in \mathcal{T}, \tag{163}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{W}_i^{1,t}} y_j^t \geq x_i^{1,t} + x_i^{2,t} \quad : \forall i \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T}, \tag{164}$$

$$x_i^{2,t} \geq x_i^{1,t} \quad : \forall i \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T}, \tag{165}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{W}} y_j^t = J \quad : \forall t \in \mathcal{T}, \tag{166}$$

$$y_j^t \leq U_j \quad : \forall j \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{T}, \tag{167}$$

$$y_j^t + \sum_{l \in \mathcal{W}} r_{l,j}^t - \sum_{l \in \mathcal{W}} r_{j,l}^t = y_j^{t+1} \quad : \forall j \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{T}', \tag{168}$$

$$y_j^T + \sum_{l \in \mathcal{W}} r_{l,j}^T - \sum_{l \in \mathcal{W}} r_{j,l}^T = y_j^1 \quad : \forall j \in \mathcal{W}, \tag{169}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{V}_j^{2,t}} x_{ij}^t \leq \omega U_j \quad : \forall j \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{T}, \tag{170}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{W}_i^{2,t}} x_{ij}^t = L_i \quad : \forall i \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T}, \tag{171}$$

$$x_{ij}^t \in \{0,1\} \quad : \forall i \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{T}, \tag{172}$$

$$x_i^{\lambda,t} \in \{0,1\} \quad : \forall i \in \mathcal{V}, \lambda = 1,2, \tag{173}$$

$$r_{j_1,j_2}^t \quad entiere \quad j_1, j_2 \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{T}, \tag{174}$$

$$y_j^t \quad entiere \quad j \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{T}. \tag{175}$$

(162) : pour assurer la couverture des demandes dans la zone i par au moins une fois dans la rayon r_2 et à la période t,

(163) : pour assurer la couverture de $\alpha\%$ de la demande totale dans la rayon r_1 et à chaque période t,

Les contraintes (164) et (165) assurent qu'il y a suffisamment de véhicule au site j pour couvrir les demandes dans la zone i à la période t.

Les contraintes (166) et (167) expriment les limites sur le nombre des véhicules.

Les contraintes (168) et (169) assurent la re-localisation des véhicules entre les différentes bases au passage des périodes.

Acknowledgements

Ce rapport a été préparé au sein du Laboratoire Génie Industriel (LGI) dans le cadre du projet POSAMU (financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR)).

Références

[1] Alsalloum, O. I. et G. K. Rand, Extensions to emergency vehicle location model, *Computers & Operations Research*, vol. 33, pp. 2725-2743, 2006.

[2] Andersson, T. et P. Varband, Decision support tools for ambulance dispatch and relocation, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 58, pp. 195-201, 2007.

[3] Ball, M. O. et L. F. Lin, A reliability model applied to emergency service vehicle location, *Operations Research*, vol. 41, pp. 18-36, 1993.

[4] Batta, R., J. M. Dolan et N. N. Krishnamurty, The maximal expected covering location problem : Revisited, *Transportation Science*, vol. 23, pp. 277-287, 1989.

[5] Bélanger V., A. Ruiz, P. Soriano, Déploiement et redéploiement des véhicules ambulanciers dans la gestion d'un service préhospitalier d'urgence, *Rapport Technique*, 2009.

[6] Beraldi P., M.E. Bruni, Conforti D., Designing robust emergency medical service via stochastic programming, *European journal of Operational Research*, 158, 183-193, 2004.

[7] Beraldi P., M.E. Bruni, A probabilistic model applied to emergency service vehicle location, *European journal of Operational Research*, 196, 323-331, 2009.

[8] Brotcorne L., Laporte G., Semet F., Ambulance location and relocation models, *European journal of Operational Research*, 147, 451-461, 2003.

[9] Carpentier, G. La conception et la gestion d'un réseau de service ambulancier. *Master's thesis, Université Laval*, 2006.

[10] Church, R. L. et C. S. ReVelle, The maximal covering location problem, *Papers of Regional Science Association*, vol. 32, pp. 101-118, 1974.

[11] Coskun N., Erol R., An Optimization Model for Locating and Sizing Emergency. Medical Service Stations, *Journal of Medical Systems*, 34, 43-49, 2010.

[12] Daskin M.S., A hierarchical objective set covering model for emergency medical service vehicle deployment, *Transportation Science*, vol. 15, pp. 137-152, 1981.

[13] Daskin M.S., Application of an expected covering model to emergency medical service design, *Decision Sciences*, vol. 13, pp. 416-439, 1982.

[14] Daskin M.S., A maximum expected location problem : Formulation, properties and heuristic solution, *Transportation Science*, vol. 17, pp. 416-439, 1983.

[15] Daskin M.S and Dean K.L., Location of health care facilities, in *Operations Research and Health Care*, International Series in Operations Research and Management Science, Volume 70, Part 2, pp. 43-76, 2005.

[16] Dentcheva D., Prekopa A., Ruszczynski A., On stochastic integer programming under probabilistic constraints, RUTCOR-Rutgers Center for Operations Research RRR 29-98, Rutgers University, New Jersey, USA, 1998.

[17] Dentcheva D., Prekopa A., Ruszczynski A., Concavity and efficient points of discrete distribution in probabilistic programming, *Mathematical Programming*, (89) 55-77, 2000.

[18] Eaton, D. J., H. M. U Sanchez, R. R. Lantigua et J. Morgan, Determining ambulance deployment in Santo Domingo, Dominican Republic, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 37, pp. 113-126, 1986.

[19] Erkut, E., A. Ingolsson, T. Sim et G. Erdogan, Computational comparison of five maximal covering models for locating ambulances, *Geographical Analysis*, vol. 41, pp. 43-65, 2009.

[20] Gendreau, M., G. Laporte et F. Semet, Solving an ambulance location model by tabu search, *Location Science*, vol. 5, pp. 75-88, 1997.

[21] Gendreau, M., G. Laporte et F. Semet, A dynamic model and parallel tabu search heuristic for real-time ambulance relocation, *Parallel Computing*, vol. 27, pp. 1641-1653, 2001.

[22] Gendreau, M., G. Laporte et F. Semet, The maximal expected relocation problem for emergency vehicles, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 57, pp. 22-28, 2006.

[23] Hakimi, S.L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, 12, 450-459, 1964.

[24] Hogan, K. et C. S. ReVelle, Concepts and application of backup coverage, *Management Science*, vol. 34, pp. 1434-1444, 1986.

[25] Hongzhong J., F. Ordonez and M. Dessouky, A modeling framework for facility location of medical services for large-scale emergencies, *IIE Transactions*, 39, 41-55, 2007.

[26] Kolesar, P. J. et W. E. Walker, An algorithm for the dynamic relocation of fire companies, *Operations Research*, vol. 22, pp. 249-274, 1974.

[27] Larson, R. C., A hypercube queuing model for facility location and redistricting in urban emergency services, Computers & *Operations Research*, vol. 1, pp. 67-85, 1974.

[28] Larson, R. C., Approximating the performance of urban emergency service systems, *Operations Research*, vol. 23, pp. 845-868, 1975.

[29] Mandell, M. B., Covering models for two-tiered emergency medical services system, *Location Science*, vol. 6, pp. 355-368, 1988.

[30] McLay Laura A., A maximum expected covering location model with two types of servers, *IIE Transactions*, 41, 730-741, 2009.

[31] Moeini M., Jemai Z., Meunier F., Sahin E., A Reliable Optimization Model for the Emergency Medical Service Systems, Technical Report, Ecole Centrale Paris (2011).

[32] Moeini M., Jemai Z., Meunier F., Sahin E., A Dynamic Vehicle Location-Relocation Model for the Emergency Medical Service Systems, Submitted article (2012).

[33] Rajagopalan, H. K., C. Saydam et J. Xiao, A multiperiod set covering location model for dynamic redeployment of ambulances, *Computers & Operations Research*, vol. 35, pp. 814-826, 2008.

[34] Repede, J. F. et J. J. Bernardo, Developping and validating a decision support system for location emergency medical vehicles in Louisville, Kentucky, *European Journal of Operational Research*, vol. 75, pp. 567-581, 1994.

[35] ReVelle, C. S. et K. Hogan, A reliability constrained siting model with local estimates of busy fractions, *Environment and Planning B*, vol. 15, pp. 143-152, 1988.

[36] ReVelle, C. S. et K. Hogan, The maximum availability location problem, *Transportation Science*, vol. 23, pp. 192-200, 1989.

[37] Schilling, D.A., Elzinga, D.J., Cohon, J., Church, R.L., ReVelle, C.S., The TEAM/FLEET models for simultaneous facility and equipment sitting. *Transportation Science* 13, 163-175, 1979.

[38] Schmid V., Doerner K.F., Ambulance location and relocation problems with time-dependent travel times, *European journal of Operational Research*, 207, 1293-1303, 2010.

[39] Storbeck, J., Slack, natural slack and location covering, *Socio-Economic Planning Sciences*, vol. 16, pp. 99-105, 1982.

[40] Swersey A. The Deployment of Police, Fire, and Emergency Medical Units, in *Handbooks in OR* & *MS, Elsevier Science*, Vol. 6, pp. 151-200, 1994.

[41] Toregas, C., R. Swain, C. S. ReVelle et L. Bergman, The location of emergency service facilities, *Operations Research*, vol. 19, pp. 1363-1373, 1971.