Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

WS 2004/05

Lineare Optimierung
Übung 10 vom 18.01.05

(Abgabe bis zum 26.01.2005, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes)

Aufgabe 1 (Duale Simplexmethode und Gomory-Schnittebenen):

Betrachte das ganzzahlige Programm

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{unter} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & + & 2x_2 & \leq & \frac{23}{2} \\
& & & x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 & & & \leq & \frac{9}{2} \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0 \\
& x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}\,.
\end{array}$$

Zeichne ein Bild, um die erste Frage zu beantworten:

(a) Was ist der Optimalwert der linearen Relaxierung? Was ist der Optimalwert des ganzzahligen Problems? Was ist die konvexe Hülle aller zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems?

(b) Hier das optimale Simplextableau zur LP-Relaxierung:

		s_4	s_2
	$-43/2$	$-7/2$	$-1/2$
s_1	3	$3/2$	$-1/2$
x_2	$7/2$	$-1/2$	$1/2$
s_3	$1/2$	$1/2$	$-1/2$
x_1	$9/2$	1	0

(Dabei bezeichnet s_i die Schlupfvariable zur i-ten Ungleichung.) Gib eine Gomory-Schnittebene an, wobei die erste Zeile des Tableaus verwendet werden soll, für die sich ein sinnvoller Schnitt ergibt. Stelle den Schnitt graphisch dar.

Füge die neue Restriktion zum oben angegebenen LP hinzu und löse das neue lineare Programm mit der dualen Simplexmethode.

(5+15 Punkte)

Aufgabe 2 (Gomory-Chvátal-Schnittebene):

Sei $k \geq 3$ eine natürliche Zahl und P die konvexe Hülle der Punkte $(0,0), (1,0)$ und $(\frac{1}{2}, k)$. Gib ein (endliches) System von linearen Ungleichungen an, welches das Polytop P' definiert, wobei P' der Schnitt von P mit allen Gomory-Chvátal-Schnittebenen zu P ist.

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Unimodulare Matrizen und Ganzzahligkeit):

Eine Matrix A heißt *total unimodular*, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen der Werte -1, 0 oder 1 hat.

(a) Gegeben sei folgende 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A total unimodular? Begründe die Aussage.

(b) Gegeben sei die Matrix A aus Aufgabe 3(a). Zeige, dass für alle ganzzahligen Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$, für die $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ nicht leer ist, alle Ecken von $P(b)$ ganzzahlig sind.

(c) Seien b und c ganzzahlige Vektoren und A eine total unimodulare Matrix. Beweise, dass die Polyeder $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ und $\{x \mid Ax \leq b, 0 \leq x \leq c\}$ nur ganzzahlige Ecken haben.

(Tipp: Zeige zuerst, dass für eine gegebene total unimodulare Matrix B das Polyeder $P(B,d) = \{x \mid Bx \leq d\}$ nur ganzzahlige Ecken besitzt. Verwende dies im nächsten Schritt, um die entsprechenden Aussagen für die obigen Polyeder herzuleiten.)

(5+5+10 Punkte)