Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

WS 2004/05

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

Lineare Optimierung
Übung 7 vom 15.12.04

(Abgabe bis zum 22.12.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes)

Aufgabe 1 (Lexikographische Auswahlregel):

Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & x_1 & - & 7x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4 & \leq & 0 \\ & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 0 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

mit dem Simplexverfahren, indem Sie die lexikographische Auswahlregel benutzen.

(25 Punkte)

Aufgabe 2 (Ein Klee-Minty-Beispiel):

Wir betrachten für $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ und $n \in \mathbb{N}$ das folgende lineare Programm, dessen zulässige Menge aus einem "deformierten Einheitswürfel" besteht:

$$\begin{array}{llcccl} \max & x_n & & & & \\ \text{unter} & \epsilon & \leq & x_1 & \leq & 1 \\ & \epsilon x_{i-1} & \leq & x_i & \leq & 1 - \epsilon x_{i-1}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n \end{array}$$

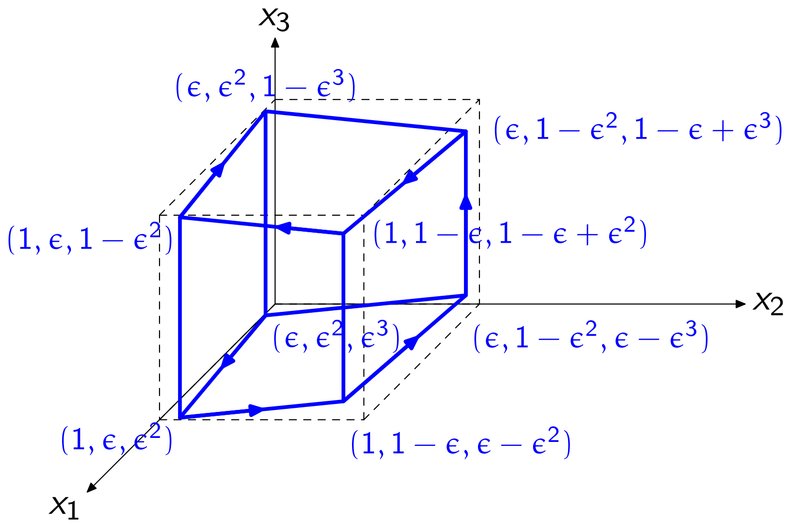

Abbildung 1: Klee-Minty-Beispiel für $n = 3$.

a) Bringen Sie dieses lineare Programm in die Standardform (P) durch Einführung von Schlupfvariablen u_1 für die Ungleichung $x_1 \leq 1$, v_1 für die Ungleichung $\epsilon \leq x_1$ und von Schlupfvariablen u_i für die Ungleichungen $x_i \leq 1 - \epsilon x_{i-1}$ und v_i für die Ungleichungen $\epsilon x_{i-1} \leq x_i$, wobei $i \in \{2, \ldots, n\}$. Fassen Sie x, u und v in einem Vektor z zusammen.

b) Zeigen Sie, dass jede zulässige Basis sämtliche x_i und für jedes $i = 1, \ldots, n$ entweder u_i oder v_i enthält. Gibt es degenerierte zulässige Basislösungen?

c) Es ist bekannt, dass für bestimmte Pivotregeln das Simplexverfahren angewendet auf (P) *exponentiell viele Schritte* benötigt, um von der Basislösung der Ecke $(\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^n)$ zur Optimallösung zu gelangen. (Ein Klee-Minty-Beispiel mit exponentiell vielen Simplexschritten ist in Abbildung 1 dargestellt.)

   Zeigen Sie, dass das Simplexverfahren angewendet auf (P) mit der Pivotregel des steilsten Anstieges nur *einen* Pivotschritt benötigt, um von der Basislösung der Ecke $(\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^n)$ zur Optimallösung zu gelangen. (Die Pivotregel des steilsten Anstieges wurde ursprünglich von Dantzig vorgeschlagen. Dabei wählt man als Pivotspalte die Spalte mit dem größten positiven Kostenkoeffizienten bei Maximierungsproblemen.)

(5+15+15 Punkte)