Technische Universität Braunschweig
Fachbereich 1 – Mathematik
Prof. Dr. S. Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

Wintersemester 2003/2004

Abschlussklausur
“Lineare Optimierung”
30.01.2004

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

Mit dem Aushang des Klausurergebnisses nur mit der Matrikelnummer
- neben Raum ***F 524***
- im Internet
(ggf. streichen!) bin ich einverstanden:

.... *(Unterschrift)*
Ohne Unterschrift kein Aushang!

Die Klausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden.
Alle Antworten zu den Aufgaben 1-3 müssen begründet werden, in Aufgabe 4, soweit dies verlangt ist. Dabei dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung und von den Übungsblättern (mit genauer Quellenangabe) benutzt werden.
Alle Blätter sind mit *Namen* zu versehen. Abzugeben sind die Lösungen in *Reinschrift* mit allen *Nebenrechnungen* auf diesen Aufgabenblättern, sowie diesem Blatt als Deckblatt. Mit *Bleistift* oder *in rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
Bitte vor der Abgabe die Blätter nach Aufgaben sortieren und Aufgaben unten ankreuzen!
Die Bearbeitungszeit für die Klausur ist 180 Minuten.
Erlaubte Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen wie Skripten, Übungsblätter und Musterlösungen, persönliche Aufzeichnungen. Nicht erlaubt sind Bücher und Taschenrechner aller Art.

Aufgabe	Bearbeitet	Punkte	von
1			**20**
2			**20**
3			**20**
4			**20**
Summe			**80**

1. Aufgabe: **8+12 Punkte**

Betrachte das ganzzahlige Programm

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{unter} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & \frac{23}{2} \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & \frac{9}{2} \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}\,.
\end{array}
$$

Zeichne ein Bild, um die erste Frage zu beantworten:

(a) Was ist der Optimalwert der linearen Relaxierung? Was ist der Optimalwert des ganzzahligen Problems ? Was ist die konvexe Hülle aller zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems ?

(b) Hier das optimale Simplextableau zur LP-Relaxierung:

		s_4	s_2
	$43/2$	$-7/2$	$-1/2$
s_1	3	$-3/2$	$1/2$
x_2	$7/2$	$1/2$	$-1/2$
s_3	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_1	$9/2$	-1	0

(Dabei bezeichnet s_i die Schlupfvariable zur i-ten Ungleichung.) Gib eine Gomory-Schnittebene an, wobei die erste Zeile des Tableaus verwendet werden soll, für die sich ein sinnvoller Schnitt ergibt. Stelle den Schnitt graphisch dar.

Füge die neue Restriktion zum oben angegeben LP hinzu und löse das neue lineare Programm mit der dualen Simplexmethode.

2. Aufgabe: **4+4+5+4+3 Punkte**

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Ein Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von paarweise nicht-inzidenten Kanten. Das MAXIMUM-MATCHING-Problem besteht darin, ein Matching maximaler Grösse in einem Graphen zu finden.

(a) Betrachte den Graphen G in Abbildung 1. Formuliere ein ganzzahliges

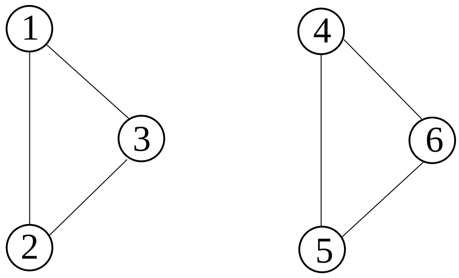

Abbildung 1: Graph G

Programm (IP) mit möglichst wenigen Restriktionen zum MAXIMUM-MATCHING-Problem für G. Gib ein gleich großes lineares Programm (P) an, welches das ganzzahlige Programm (IP) relaxiert.

(b) Begründe kurz, wie eine optimale Lösung zu (IP) und der dazugehörige Optimalwert z_M aussehen müssen. Zeige, dass die Optimalwerte zu (IP) und (P) verschieden sind. (Es reicht dazu, eine zulässige Lösung von (P) zu finden, die einen Wert grösser als z_M hat.)

(c) Leite das zu (P) duale lineare Programm (D) her. Gib eine optimale Lösung von (D) an. (Es reicht dazu, eine zulässige Lösung von (D) zu finden, die denselben Wert wie eine zulässige Lösung von (P) hat.)

(d) Gib eine Interpretation des zu (D) gehörigen ganzzahligen Programms (ID) als Optimierungsproblem an. Gib eine optimale Lösung von (ID) an.

(e) Welche Restriktionen sollten zum linearen Programm (P) hinzugenommen werden, damit dieses nur ganzzahlige Basislösungen hat ?

3. Aufgabe: **20 Punkte**

Betrachte das Transportnetzwerk in Abbildung 2 und das zugehörige Versandproblem. Die Zahlen an den Kanten stehen für Kosten c_{ij} und die Zahlen an den Knoten für Bilanzen.

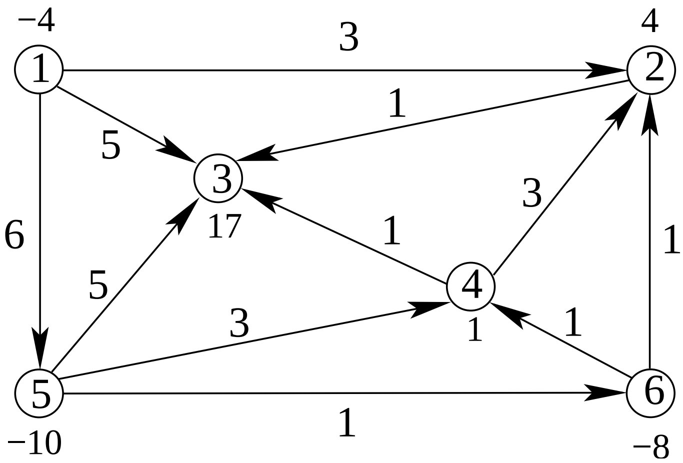

Abbildung 2: Ein Transportnetzwerk

Löse dieses Versandproblem mit dem Netzwerk-Simplexverfahren. Starte dabei mit folgender Basislösung:

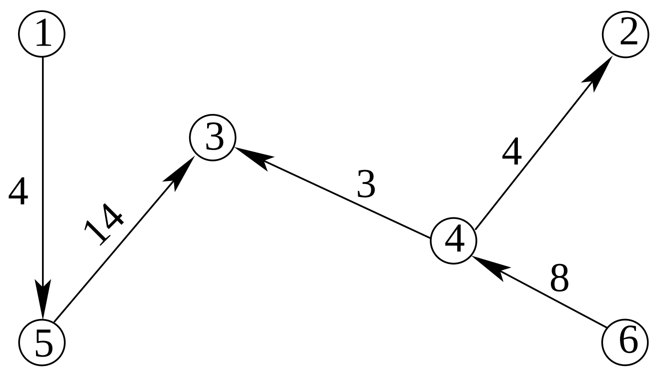

Abbildung 3: Die erste Basislösung

Zur Bildung von neuen Basislösungen wähle in jeder Iteration die Kante (i, j) mit maximalem, positivem Wert $y_j - y_i - c_{ij}$. Ausserdem benutze die Strategie von Cunningham zur Sicherstellung der Endlichkeit und wähle dabei den Knoten 6 als Wurzel.

Bei der Berechnung der y_i-Werte setze im ersten Schritt y_6 auf den Wert 0. In jedem weiteren Iterationsschritt aktualisiere die y_i-Werte mit Hilfe der in der großen Übung vorgestellten Update-Formel.

4. Aufgabe: **20 Punkte**

(a) Wahr oder falsch: Die Anzahl der Optimallösungen eines linearen Programms ist immer endlich. (Kurze Begründung!)

(b) Wahr oder falsch: Die Anzahl der Basislösungen eines linearen Programms ist immer endlich. (Kurze Begründung!)

(c) Wann ist die revidierte Simplexmethode vorteilhafter als die Grundversion der Simplexmethode?

(d) Wahr oder falsch: Die primale Zielfunktion ist auf jeden Fall unbeschränkt, wenn das duale Problem keine zulässigen Lösungen besitzt. (Kurze Begründung!)

(e) Wahr oder falsch: Wenn es eine Methode gibt, die einen zulässigen Punkt eines Ungleichungssystems findet, so kann diese direkt zur Lösung von LP's benutzt werden. (Kurze Begründung!)

(f) Gib in eigenen Worten an, was man braucht um zu zeigen, dass ein Problem zur Klasse NP$\cap$co-NP gehört.

(g) Vergleiche Simplexmethode und Ellipsoidmethode: Welche Vor- und Nachteile haben sie jeweils?

(h) Prof.Dr. Alexandr Plotnikov verkündet, er habe eine polynomiale Methode für das Traveling-Salesman-Problem gefunden. Die Braunschweiger Zeitung bittet um eine kurze fachkundige Stellungnahme!

(i) Prof.Dr. Emo Welzl verkündet, er habe eine Pivotauswahlregel gefunden, die die Simplexmethode zu einem polynomialen Verfahren macht. Und schon wieder ruft die Braunschweiger Zeitung an!

(j) Erklären Sie einem mathematisch nicht vorgebildeten Wirtschaftswissenschaftler in einfachen klaren Sätzen, welche Bedeutung die Dualität der linearen Optimierung für die Betrachtung von Wettbewerbssituationen hat, in denen zwei Personen versuchen, sich gegenseitig Geld abzuknöpfen.