Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

WS 2003/04

Lineare Optimierung
Anlage 4: Das Duale Simplexverfahren

Problem: Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max\left\{c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\right\},\ \text{wobei } c \leq 0.$$

Ausgangsdaten:

$$(t_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & c^T \\ b & -A \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq n,$$

$$B := (n+1, \ldots, n+m), \qquad N := (1, \ldots, n).$$

Der Algorithmus:

1. **Optimalität:** Ist ein $t_{i0} < 0$, so gehe nach 2. Anderenfalls ist eine Optimallösung erreicht. Setze

   $$x_{B(i)} := t_{i0},\ (1 \leq i \leq m); \qquad x_{N(j)} := 0,\ (1 \leq j \leq n); \qquad \bar{z} := t_{00}$$

   Stop.

2. **Bestimmung der Austauschzeile:** Man wähle den Index r so, daß

   $$t_{r0} = \min_{1 \leq i \leq m} t_{i0}.$$

3. **Zulässigkeitskriterium:** Sind alle $t_{rj} \leq 0,\ 1 \leq i \leq m$, so existiert keine Lösung. Terminiere.
   Gibt es ein $t_{rj} > 0$, $1 \leq j \leq n$, so gehe nach 4.

4. **Bestimmung der Austauschspalte:** Man wähle den Index s so, daß

   $$\frac{t_{0s}}{-t_{rs}} = \min\left\{\frac{t_{0j}}{-t_{rj}} \mid t_{rj} > 0,\ j = 1, \ldots, n\right\}.$$

   Gehe nach 5.

5. **Pivotoperation:** Vertausche die s-te Komponente von N mit der r-ten Komponente von B und setze

   $$\begin{array}{lcll} \bar{t}_{rs} & := & \frac{1}{t_{rs}}; & \\ \bar{t}_{rj} & := & -\frac{t_{rj}}{t_{rs}}, & \text{für } j = 0, \ldots, n;\ j \neq s; \\ \bar{t}_{is} & := & \frac{t_{is}}{t_{rs}}, & \text{für } i = 0, \ldots, m;\ i \neq r; \\ \bar{t}_{ij} & := & t_{ij} - \frac{t_{is}t_{rj}}{t_{rs}}, & \text{für } i = 0, \ldots, m; i \neq r, \text{ und } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s. \end{array}$$

   Nun ersetze $t_{ij} := \bar{t}_{ij}$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$.

   Gehe nach 1.

Beispiel zum Dualen Simplexverfahren

Problem: Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max\ -x_1 - 2x_2 \quad \text{unter} \quad \begin{array}{rcr} -x_1 - x_2 & \leq & -3 \\ -x_2 & \leq & -2 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Ausgangstableau:

		y_5 x_1	y_6 x_2
	0	-1	-2
$y_1\ x_3$	-3	1	1
$y_2\ x_4$	-2	0	1
$y_3\ x_5$	3	1	-1
$y_4\ x_6$	3	-1	1

Das Ausgangstableau ist dual zulässig, nicht aber primal zulässig.

Wir bestimmen $r = 1, s = 1$ und führen eine Pivotoperation durch:

Tableau 1:

		y_1 x_3	y_6 x_2
	-3	-1	-1
$y_5\ x_1$	3	1	-1
$y_2\ x_4$	-2	0	1
$y_3\ x_5$	6	1	-2
$y_4\ x_6$	0	-1	2

Ein weiterer dualer Simplexschritt mit $s = 2, r = 2$ führt auf

Tableau 2:

		y_1 x_3	y_2 x_4
	-5	-1	-1
$y_5\ x_1$	1	1	-1
$y_6\ x_2$	2	0	1
$y_3\ x_5$	2	1	-2
$y_4\ x_6$	4	-1	2

Tableau 2 ist nun primal und dual zulässig, daher primal und dual optimal. Die Lösung des gegebenen Problems lautet

$$x_1 = 1, x_2 = 2, c^T x = -5 = b^T y, y_1 = +1, y_2 = +1, y_3 = 0, y_4 = 0.$$