Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

WS 2003/04

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

Lineare Optimierung
Anlage 1: Das Simplexverfahren mit beschränkten Variablen

Problem: Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b;\ 0 \leq x \leq d\},\ \text{wobei } b \geq 0 \text{ und } 0 \leq d \leq \infty.$$

Ausgangsdaten:

$$k := 0; \qquad (t_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & c^T \\ b & -A \end{pmatrix}; \qquad 0 \leq i \leq m; \quad 0 \leq j \leq n;$$

$$K \subseteq \{1, \ldots, n\},\ \text{die Menge der Indizes } i, \text{ wobei } 0 \leq x_i \leq d_i < \infty.$$

$$B(i) := \begin{cases} r, & \text{falls } x_r \text{ in der Basis ist;} \\ -r, & \text{falls } \overline{x}_r \text{ in der Basis ist.} \end{cases}$$

$$N(j) := \begin{cases} r, & \text{falls } x_r \text{ eine Nichtbasisvariable ist;} \\ -r, & \text{falls } \overline{x}_r \text{ eine Nichtbasisvariable ist.} \end{cases}$$

Der Algorithmus:

1. **Optimalität:** Ist ein $t_{0j} > 0$ für $1 \leq j \leq n$, so gehe nach 2.

   Anderenfalls ist eine Optimallösung erreicht. Setze

   $$x_{B(i)} := \begin{cases} t_{i0}, & \text{falls } B(i) > 0; \\ d_{B(i)} - t_{i0}, & \text{falls } B(i) < 0, \end{cases} \quad \text{und } x_{N(j)} := \begin{cases} 0, & \text{falls } N(j) > 0; \\ d_{N(j)}, & \text{falls } N(j) < 0, \end{cases}$$

   wobei $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Terminiere.

2. **Bestimmung der Austauschspalte:** Man wähle den Index s so, daß

   $$t_{0s} = \max\{t_{0j} \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

3. **Endlichkeitskriterium und Wahl der Austauschzeile:**
   Bestimme das Minimum der Größen:

   $$\begin{array}{lll} d_{N(s)}, & \text{falls} & N(s) \in K; \\ -\dfrac{t_{i0}}{t_{is}}, & \text{falls} & t_{is} < 0; \\ \dfrac{t_{i0} - d_{B(i)}}{-t_{is}}, & \text{falls} & t_{is} > 0 \text{ und } B(i) \in K; \quad \text{wobei } 1 \leq i \leq m. \end{array}$$

   Ist die Menge

   $$(\{N(s)\} \cap K)\ \cup \{i \mid t_{is} < 0,\ 1 \leq i \leq m\}\ \cup \{i \mid t_{is} > 0, B(i) \in K,\ 1 \leq i \leq m\}$$

leer, so existiert keine endliche Lösung. Terminiere.

a) Wird das Minimum für $d_{N(s)}$ angenommen, so gehe nach 5.

b) Wird das Minimum für $-\frac{t_{r0}}{t_{rs}}$ angenommen, so gehe nach 4.

c) Wird das Minimum für $\frac{t_{r0}-d_{B(r)}}{-t_{rs}}$ angenommen, setze $k := 1$ und gehe nach 4.

4. **Pivotoperation:** Vertausche die r-te Komponente von B mit der s-ten Komponente von N und setze wie üblich

$$\begin{array}{lll}
\bar{t}_{rs} := & \frac{1}{t_{rs}}; & \\
\bar{t}_{rj} := & -\frac{t_{rj}}{t_{rs}}, & \text{für } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s; \\
\bar{t}_{is} := & \frac{t_{is}}{t_{rs}}, & \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r; \\
\bar{t}_{ij} := & t_{ij} - \frac{t_{is}t_{rj}}{t_{rs}}, & \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r \text{ und } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s.
\end{array}$$

Nun ersetze $t_{ij} := \bar{t}_{ij}$, $\quad 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n.$

Ist $k = 1$, so setze $k := 0$ und gehe zu 5, sonst gehe nach 1.

5. **S-Transformation:**

$$\begin{array}{ll}
t_{i0} := t_{i0} + t_{is}d_{N(s)}, & \\
t_{is} := -t_{is}, & \text{für } 0 \leq i \leq m.
\end{array}$$

Setze $N(s) := -N(s)$ und gehe nach 1.

Beispiel

Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max\{-x_1 + 4x_2 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 2,\ 0 \leq x_1,\ 0 \leq x_2 \leq 4,\ 0 \leq x_3 \leq 5\}.$$

Wir erhalten die folgenden Tableaus:

Ausgangstableau:

	N	x_1	x_2
B	0	-1	4
x_3	2	-1	1

$x_2 \leq 4$

$x_3 = 2 + x_2 \leq 5$ (begr.)

Zwischentableau: (nach b))

	N	x_1	x_3
B	-8	3	4
x_2	-2	1	1

auf dieses Tableau wird nun S(2) angewandt

2. Tableau:

	N	x_1	$\bar{x}_3$
B	12	3	-4
x_2	3	1	-1

$x_2 = 3 + x_1 \leq 4$

Zwischentableau: (nach b))

	N	x_2	$\bar{x}_3$
B	3	3	-1
x_1	-3	1	1

auf dieses Tableau wird nun S(1) angewandt

3. Tableau:

	N	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
B	15	-3	-1
x_1	1	-1	1

Dieses Tableau ist optimal.

Lösung:

$x_1 = 1$

$\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$

$\bar{x}_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 5$