

**Klausur zum Modul
„Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“**

Aufgabe 1.

1.1. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie Summe der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}.$$

Wenden Sie die Teleskop-Methode an.

1.2. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^3(x)}.$$

Wenden Sie die Regeln von de l'Hospital an.

Aufgabe 2.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \frac{6x^3 - 3x^5}{x^2 + 1}$$

definiert.

2.1. (1.0 Punkte.) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

2.2. (4.0 Punkte.) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten sowie die relativen Extrema von f .

2.3. (1.0 Punkte.) Skizzieren Sie den Graphen von f .

Aufgabe 3.

3.1. (3 Punkte.) Berechnen Sie das vierte Taylorpolynom der Funktion

$$g(x) = \ln(\cos^2(x))$$

um den Entwicklungspunkt $x = 0$.

3.2. (3 Punkte.) Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom der Funktion

$$h(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

um den Entwicklungspunkt $x = 0$. (Verwenden Sie die Taylorentwicklung von $\cos(t)$ um $t = 0$. Integrieren Sie gliedweise.)

Aufgabe 4.

4.1. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 11}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx.$$

(Nehmen Sie eine Partialbruchzerlegung des Integranden vor. Es gilt

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{\alpha}{2} \ln |(x-a)^2 + b^2| + \frac{\alpha a + \beta}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

für $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$.)

4.2. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{3x^3}{\sqrt{x^2 - 3}} dx.$$

(Zerlegen Sie den Integranden in der Form

$$\frac{3x^3}{\sqrt{x^2 - 3}} = 3x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

Betrachten Sie den zweiten Faktor als Ableitung. Integrieren Sie partiell. Wenden Sie schließlich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.)

- Lösungen -

$$1.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3(n+1)-2} \right\} = -\frac{1}{6}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right\} = \frac{1}{3}.$$

2. Die Funktion f ist ungerade. Es sind $0, \pm\sqrt{2}$ die Nullstellen von f . Es gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$. Die Quotientenregel liefert

$$f'(x) = (-9) \cdot \frac{x^2(x-1)(x+1)(x^2+2)}{(x^2+1)^2}.$$

Es sind $0, \pm 1$ die Nullstellen der Ableitung f' . Auf den Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$ fällt f streng monoton. Auf $(-1, 1)$ steigt f streng monoton. Im Punkte $x = -1$ besitzt f ein relatives Minimum mit $f(-1) = -\frac{3}{2}$. Im Punkte $x = 1$ besitzt f ein relatives Maximum mit $f(1) = \frac{3}{2}$.

3.1. Berechnung von $g^{(n)}(0)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ liefert $T_4(x) = -x^2 - \frac{x^4}{6}$.

Alternativ kann man die Cosinusreihe quadrieren (man benötigt nur die drei Glieder bis zur vierten Ordnung!) und das Ergebnis als x in die Reihe für $\log(x)$ einsetzen.

3.2. Die Cosinusreihe liefert

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} \mp \dots \right\} dt = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} \mp \dots$$

Damit folgt $T_3(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{72}$.

4.1. Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 5x + 11}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx &= \int \left\{ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2 + 2^2} \right\} dx \\ &= 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + \text{constans}. \end{aligned}$$

4.2. Partielle Integration liefert

$$\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}} dx = \left[3x^2\sqrt{x^2-3} - 2(x^2-3)^{\frac{3}{2}} \right]_{\sqrt{3}}^2 = 10.$$