

**Übungen zum Modul  
„Lineare Algebra  
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“**

**Key Terms.** *Matrixdarstellung. Basiswechsel. Matrix-Inversion. Determinante. Charakteristisches Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren. Transformation auf Diagonalgestalt. Orthonormalbasen. Das Verfahren von Gram-Schmidt. Orthogonale Projektionen.*

**93.G.** Gegeben sei die reelle  $(3 \times 3)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & -10 \\ 8 & 11 & -8 \\ 16 & 10 & -11 \end{pmatrix}.$$

**93.1.** Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Determinante von  $A$ .

**93.2.** Zeigen Sie, dass der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix  $A$  besitzt.

**93.3.** Berechnen Sie eine invertierbare reelle  $(3 \times 3)$ -Matrix  $T$  derart, dass  $T^{-1}AT$  eine Diagonalmatrix  $D$  ist. Machen Sie die Probe. Überlegen Sie sich, welche Bedeutung die Diagonalelemente von  $D$  besitzen.

**93.4.** Zeigen Sie, dass die Matrix  $A$  invertierbar ist. Berechnen Sie  $A^{-1}$ . Wenden Sie die Ergebnisse aus 93.3 an.

**94.G.** Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**94.1.** Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von  $\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ .

**94.2.** Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^4$ , die aus Eigenvektoren der linearen Abbildung  $P$  besteht.

**94.3.** Rechnen Sie nach, dass

$$M(P) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung der orthogonalen Projektion  $P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  von  $\mathbb{R}^4$  auf  $\ker(A)$  hinsichtlich der kanonischen Basis des  $\mathbb{R}^4$  ist. Nach Definition gilt  $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$  für alle  $\mathbf{v} \in \ker(A)$  und  $P\mathbf{w} = \mathbf{0}$  für alle Vektoren  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$ , die auf dem Teilraum  $\ker(A)$  senkrecht stehen.

**94.4.** Berechnen Sie den Abstand  $d(\mathbf{b}, \ker(A))$  von  $\mathbf{b}$  und  $\ker(A)$ .

---

### Wichtige Termine.

- Klausur *Lineare Algebra*, Mittwoch, 26.02.2003, 9.00-10.30 Uhr.
- Klausur *Analysis I*, Mittwoch, 26.02.2003, 11.30-13.00 Uhr.
- Erste Klausureinsicht, Mittwoch, 5.3.2003, 14.00-16.00 Uhr.
- Zweite Klausureinsicht, Mittwoch, 2.4.2003, 14.00-16.00 Uhr.

*Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.*

---