Technische Universität Braunschweig
Fachbereich 1 – Mathematik
Prof. Dr. S. Fekete
Dr. W.Marten

Wintersemester 2002/2003

Klausur zum Modul "Lineare Algebra für Studierende der Ingenieurwissenschaften" 26.02.2003

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

Mit dem Aushang des Klausurergebnisses nur mit der Matrikelnummer
*- am Raum **F 424***
- im Internet
(ggf. streichen!) bin ich einverstanden:

.... *(Unterschrift)*
Ohne Unterschrift kein Aushang!

Die Klausur ist mit 10 von 24 Punkten bestanden.

Alle Blätter sind mit *Namen* zu versehen. Abzugeben sind die Lösungen in *Reinschrift* mit allen *Nebenrechnungen* auf den **Vorderseiten** von DIN A4-Blättern, sowie diesem Blatt als Deckblatt. **Bitte jeweils ein neues Blatt für eine neue Aufgabe!** Mit *Bleistift* oder *in rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden. Die Bearbeitungszeit für die Klausur ist 90 Minuten. Erlaubte Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen wie Skripten, Übungsblätter und Musterlösungen, persönliche Aufzeichnungen. Nicht erlaubt sind Bücher und Taschenrechner aller Art.

Aufgabe	**Bearbeitet** *(Selbst ankreuzen!)*	**Punkte**	**von**
1			**6**
2			**6**
3			**6**
4			**6**
Summe			**24**

Note: ....

Aufgabe 1. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 15 \end{pmatrix} .$$

1.1. (2.0 Punkte.) Berechnen Sie eine Basis des Kernes von A.

1.2. (2.0 Punkte.) Berechnen Sie eine Basis des Bildes von A.

1.3. (1.0 Punkte.) Bestimmen Sie Rang und Defekt von A.

1.4. (1.0 Punkte.) Untersuchen Sie, ob die reellen Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ im Kern oder im Bild der reellen (3×3)-Matrix A enthalten sind.

Aufgabe 2. Gegeben sei die reelle (3×3)-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

2.1. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie die Determinante der Matrix B.

2.2. (3.0 Punkte.) Untersuchen Sie, ob B invertierbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse von B.

Aufgabe 3. Gegeben sei die reelle (3×3)-Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -20 & -8 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -8 & -3 \end{pmatrix} .$$

3.1. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix C.

3.2. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie eine Transformationsmatrix T derart, dass $D = T^{-1}CT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4. Sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf den Teilvektorraum

$$U = \{ (\alpha, 2\alpha, -\alpha)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \} .$$

4.1. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis B des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der linearen Abbildung p besteht. (Die Basis B kann derart angeordnet werden, dass p bezüglich B die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.)

4.2. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie die Matrixdarstellung M von p bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.
