Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

SS 2002

Einführung in die Optimierung
Übung 1 vom 17.04.02

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 24.04.02

Aufgabe 1 (Sekanten- und Newtonverfahren):
Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 7x - 2$ auf dem Intervall $[2, 3]$. Auf diesem Intervall gibt es genau eine Nullstelle $\overline{x}$. Diese soll näherungsweise bestimmt werden.

(a) Verwenden Sie 5 Schritte des Bisektionsverfahrens.
(Zur Erinnerung: Dafür beginnen Sie mit den Intervallgrenzen $a_0 = 2$, $b_0 = 3$, testen jeweils das Vorzeichen des Intervallmittelpunktes $x_i = \frac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}$ und setzen je nach Vorzeichen die Intervallgrenzen so um, dass das neue kleinere Intervall die Nullstelle enthält.)

(b) Verwenden Sie 3 Schritte des Sekantenverfahrens.
(Zur Erinnerung: Dafür beginnen Sie wieder mit den Intervallgrenzen $a_0 = 2$, $b_0 = 3$. Hier testen Sie jeweils das Vorzeichen des x-Wertes x_i, für den die Gerade durch $(a_i, f(a_i))$ und $(b_i, f(b_i))$ die x-Achse schneidet. Für x_i lässt sich eine Formel in Abhängigkeit von a_i, b_i, $f(a_i)$, $f(b_i)$ aufstellen!)

(c) Verwenden Sie 3 Schritte des Newtonverfahrens.
(Zur Erinnerung: Dafür beginnen Sie wieder mit den Intervallgrenzen $a_0 = 2$, $b_0 = 3$. Hier setzen Sie für b_{i+1} den x-Wert, für den die Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(b_i, f(b_i))$ die x-Achse schneidet. Dafür ergibt sich die Formel $b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}$.)

(d) Bestimmen Sie die exakte Lösung (raten auf der Basis der Näherungslösungen und verifizieren reicht!) und beurteilen Sie die Näherungslösungen im Vergleich.

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt):
Im Jahre 1202 beschrieb Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci, Sohn des Bonacci) in seinem Buch *Liber Abaci* das Wachstum einer Population von Kaninchen. Ein neugeborenes Paar Kaninchen braucht zwei Monate, um eigenen Nachwuchs zu produzieren. Wenn man also im ersten Monat mit einem Paar startet, dann ergibt sich die Rekursionsbeziehung

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, 2, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie durch Induktion:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5}\,)^n - (1-\sqrt{5}\,)^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

(b) Der sogenannte *Goldene Schnitt* ϕ ergibt sich daraus, dass man eine Strecke der Länge c so in zwei Teile $a \leq b$ teilt, dass $b/a = c/b = \phi$ gilt. Der Goldene Schnitt spielt in vielen Bereichen von Kunst und Ästhetik eine Rolle, hat aber auch seinen Platz in der Mathematik.

Zeigen Sie: ϕ erfüllt die Gleichung $\phi(\phi - 1) = 1$; bestimmen Sie die Lösung $\phi > 1$.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b):

$$F_n = \left\lceil \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right\rceil, \tag{1}$$

wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl liefert, die mindestens so groß ist wie x, d.h. die "Aufrundungsfunktion" beschreibt.

(d) Folgern Sie aus den vorangehenden Teilen: $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi$.

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Fibonacci-Suche):
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

(a) Zeigen Sie durch Betrachtung von Ableitungen: f ist unimodal.

(b) Führen Sie eine Fibonacci-Suche mit Startintervall $[-2, 2]$ und $n = 8$ zur Bestimmung des Minimums von f durch!

(Dazu bestimmen Sie zunächst die ersten 8 Fibonacci-Zahlen. Das Startintervall $[a_0, b_0] = [-2, 2]$ *unterteilen Sie im Verhältnis der Zahlen* F_n *und* F_{n-1} *und erhalten so den Testpunkt* x_0. *Das größere der beiden Intervalle unterteilen Sie im Verhältnis der Fibonacci-Zahlen* F_{n-1} *und* F_{n-2} *und erhalten so* y_0. *Von den dadurch entstehenden drei Intervallen können Sie eines (wie in der Vorlesung beschrieben, durch Vergleichen der Funktionswerte) für die Lage des Minimums ausschließen. Dadurch erhalten Sie die neuen Intervallgrenzen* a_1 *und* b_1 *und den inneren Testpunkt* x_1, *der* $[a_1, b_1]$ *im Verhältnis* F_{n-1} *zu* F_{n-2} *unterteilt. Nun fahren Sie entsprechend fort, bis* x_{n-2} *das Intervall* $[a_{n-2}, b_{n-2}]$ *im Verhältnis* F_2 *zu* F_1 *teilt, also in der Mitte des Restintervalles liegt.)*

Die nötigen Funktionsberechnungen können Sie mit einem Taschenrechner auf ausreichend viele Dezimalstellen durchführen.

(20 Punkte)