

Übung 3 vom 07.11.01

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 15.11.01

Aufgabe 1 (Inhalt von Funktionsflächen):

Sei $f : K \subset G \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Funktion auf einem geeigneten Gebiet G und K eine kompakte Teilmenge von G . Zeigen Sie: Der Inhalt der durch $z = f(x, y)$ gegebenen Funktionsfläche über dem Bereich K ist gegeben durch

$$\int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} d(x, y). \quad (15 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 2 (Oberflächenintegral):

Sei S die Oberfläche der Kugel mit dem Radius a um den Ursprung, die bereits in der Vorlesung betrachtet wurde. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

(Hinweis: Hier gibt es viele Wege, die zum Ziel führen. Man kann das Kugelbeispiel aus der Vorlesung erweitern; oder man kann etwas genauer darüber nachdenken, was man da eigentlich berechnet und dafür ganz schnell fertig sein!)

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Donuts und Mega-Donuts):

Wie jeden Mittwoch gehen Sie vor der Vorlesung bei Ihrer Bäckerei vorbei, um sich einen Donut zu kaufen. Dort stellen Sie fest, daß es neuerdings auch Mega-Donuts gibt mit doppelt so großem Radius, allerdings kostet er mehr als das Doppelte. Der Bäcker behauptet: „Mit dem doppelten Radius verdoppelt sich zwar auch genau das Volumen, allerdings wird die Oberfläche mehr als doppelt so groß, und da die Glasur deutlich teurer als Teig und Füllung ist, muß ich etwas mehr Geld dafür verlangen.“ Sie bezweifeln das und behaupten, die Oberfläche werde weniger als doppelt so groß, und berufen sich dabei auf die Verhältnisse bei einer Kugel. Wer hat Recht?

Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen eines Torus mit Ringradius R und Schlauchradius r ($r < R$), siehe Abbildung 1. Parametrisieren Sie dazu zunächst einen Kreis in der x - z -Ebene um $(R, 0, 0)$ mit Radius r (Variable θ). Benutzen Sie dann die aus der linearen Algebra bekannte Drehung um die z -Achse

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

um den Kreis einmal um die z -Achse zu rotieren (Variable ϕ). Was passiert nun mit Oberfläche und Volumen, wenn der Ringradius R verdoppelt wird? Sind Sie überrascht?



Abbildung 1: Parameter beim Torus

(15 Punkte)

Aufgabe 4 (Lutschen eines Bonbons):

Sei B ein kugelförmiges Hustenbonbon vom Radius r_0 , das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ der erkältete Student Florian Wirt-Meister in den Mund schiebt und zu lutschen beginnt. Da Florian ein ordentlicher Student ist, lutscht er B so, dass es immer schön kugelförmig bleibt. Dabei verkleinert sich der Radius zeitabhängig mit der Funktion $r(t)$. Die zeitliche Änderung des Volumens $V(t)$ von B ist proportional zur jeweiligen Oberfläche $F(t)$, an der seine Spucke angreifen kann:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\rho F(t).$$

(Hier ist ρ der sogenannte Ricola-Faktor, der von biochemischen Größen wie der Löslichkeit des Bonbons, der Speichelproduktion des Lutschenden und der allgemeinen Lutschfreude abhängt. Auch hier ist Florian ausgesprochen ordentlich, da ρ völlig konstant bleibt!)

(a) Geben Sie $r(t)$ als explizite Funktion von t an.

(b) Nehmen wir an, nach einer Minute sei ein Volumenanteil von q weggelutscht (also $q \cdot 100$ Prozent verschwunden). Zeigen Sie, dass die gesamte Lutschzeit

$$T = \frac{1}{1 - (1 - q)^{1/3}}$$

Minuten beträgt.

(15 Punkte)



Abbildung 2: Die Rache des Hustenbonbons (©Manfred Lippert)