

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 9

Aufgabe 1. (*Explizite FOURIER-Reihen*)

Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen aus $L^2[-\pi, \pi]$ die FOURIER-Reihen:

(a) $f(x) = |\sin x|$

(b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x \in (0, \pi]. \end{cases}$

Lösung 1.

(a) Die Funktion $|\sin x|$ ist gerade, daher gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx = \underbrace{\frac{2}{n\pi} \sin x \sin(nx)}_{=0} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx = \frac{2}{n^2\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-1} \cos x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{(n^2 - 1)\pi} (-(-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{(n^2 - 1)\pi} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $n = 0$ erhält man

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}.$$

Die FOURIER-Reihe lautet also

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{(2k)^2 - 1}.$$

(b) f ist eine ungerade Funktion, daher ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Das Produkt $f(x) \sin(nx) = |\sin(nx)|$ ist eine gerade Funktion. Damit erhält man für $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{2}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die FOURIER-Reihe ist also

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Aufgabe 2. (*Translation auf beliebige Intervalle*)

In der Vorlesung wurde für die FOURIER-Reihen stets das Intervall $[-\pi, \pi]$ betrachtet. Man kann die Theorie natürlich auf jedes beliebige kompakte Intervall übertragen: Betrachten Sie das allgemeine Intervall $[a, b]$, $a < b$. Der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ wird analog mit $L^2[a, b]$ bezeichnet und auf ihm wird das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

für alle $f, g \in L^2[a, b]$ definiert.

- (a) Wie lauten die trigonometrischen Ausdrücke auf dem Intervall $[a, b]$?
 (Hinweis: Stauchen bzw. Strecken Sie die Funktionen $\sin(nx)$ bzw. $\cos(nx)$, so daß wieder n Perioden in dem Intervall $[a, b]$ liegen. Translatieren Sie den Ursprung an die Stelle a .)
- (b) Wie lauten die orthonormierten trigonometrischen Ausdrücke $\tilde{u}_k$ auf dem Intervall $[a, b]$?
 (Tip: Verwenden Sie die trigonometrischen Formen aus Teil (a) und normieren Sie sie mit positiven Faktoren.)
- (c) Wie erhält man die FOURIER-Koeffizienten eines Elements $f \in L^2[a, b]$ zu den normierten trigonometrischen Formen $\tilde{u}_k$ aus Teil (b), wie zu den nicht normierten Formen aus Teil (a)?

Lösung 2.

- (a) Durch Dilatation und Translation erhält man die trigonometrischen Ausdrücke

$$1, \quad \cos\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad \sin\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Analog zur Vorlesung werden die Ausdrücke

$$\tilde{u}_0(x) = C_0 \cdot 1, \quad \tilde{u}_{2n-1}(x) = C_{2n-1} \cos\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad \tilde{u}_{2n}(x) = C_{2n} \sin\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit noch zu bestimmenden, positiven Konstanten C_k definiert. Die Konstanten ergeben sich aus der Normierungsbedingung $\|\tilde{u}_k\| = 1$:

$$\begin{aligned} 1 = \|\tilde{u}_0\|^2 &= \int_a^b C_0^2 dx = C_0^2(b-a) \iff C_0 = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \\ 1 = \|\tilde{u}_{2n-1}\|^2 &= C_{2n-1}^2 \int_a^b \cos^2\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx = C_{2n-1}^2 \frac{b-a}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} \cos^2 \xi d\xi \\ &= C_{2n-1}^2 \frac{b-a}{2} \iff C_{2n-1} = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \\ \text{analog } C_{2n} &= \sqrt{\frac{2}{b-a}} \end{aligned}$$

Die orthonormierten trigonometrischen Ausdrücke lauten also

$$\tilde{u}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \tilde{u}_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad \tilde{u}_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right).$$

Die Orthogonalitätsrelationen sind trivialerweise erfüllt.

- (c) Es sind die FOURIER-Koeffizienten c_k bzw. a_n, b_n der FOURIER-Entwicklung

$$(2.1) \quad f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tilde{u}_k = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) + b_n \sin\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \right]$$

gesucht. Da die Ausdrücke $\tilde{u}_k$ ein Orthonormalsystem bilden, können die zugehörigen Koeffizienten auf gewohnte Weise durch die Skalarprodukte $c_k = \langle f, \tilde{u}_k \rangle$ bestimmt werden. Aus den Formeln

$$\begin{aligned} c_0 &= \langle f, \tilde{u}_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \int_a^b f(x) dx \\ c_{2n-1} &= \langle f, \tilde{u}_{2n-1} \rangle = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \int_a^b f(x) \cos\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx \\ c_{2n} &= \langle f, \tilde{u}_{2n} \rangle = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \int_a^b f(x) \sin\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx \end{aligned}$$

folgen durch Koeffizientenvergleich in (2.1) die Formeln

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx, & n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(2n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx, & n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ganz analog zu den EULER-FOURIER-Formeln im Fall $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

Aufgabe 3. (Einige Eigenschaften der FOURIER-Transformation)

Im folgenden sei f die 2π -periodische Fortsetzung eines Elements aus $L^2[-\pi, \pi]$ mit den Fourier-Koeffizienten a_n, b_n . Zeigen Sie:

- (a) Die FOURIER-Koeffizienten der Funktion $g(x) = f(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, lauten $\tilde{a}_n = a_{n/k}$ bzw. $\tilde{b}_n = b_{n/k}$, falls k ein Teiler von n ist, sonst $\tilde{a}_n = \tilde{b}_n = 0$.
(Tip: Wenn k kein Teiler von n ist, so gilt

$$0 = \sum_{l=0}^{k-1} \sin\left(2\pi \frac{nl}{k} + \alpha\right)$$

für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.)

- (b) Die FOURIER-Koeffizienten der Funktion $g(x) = f(x + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, lauten $\tilde{a}_n = a_n \cos(n\alpha) + b_n \sin(n\alpha)$ bzw. $\tilde{b}_n = b_n \cos(n\alpha) - a_n \sin(n\alpha)$.

- (c) h sei eine weitere Funktion aus $L^2[-\pi, \pi]$ mit den FOURIER-Koeffizienten α_n, β_n . Zeigen Sie: Für die Faltung

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) h(x - y) dy$$

erhält man die FOURIER-Koeffizienten $\tilde{a}_n = \pi(a_n \alpha_n - b_n \beta_n)$ bzw. $\tilde{b}_n = \pi(a_n \beta_n + b_n \alpha_n)$. (Die Faltung geht in ein Produkt über; diese Eigenschaft wird deutlicher, wenn man mit der komplexwertigen FOURIER-Reihe arbeitet.)

Mit diesen Regeln kann man aus bereits bekannten FOURIER-Reihen neue gewinnen: Verwenden Sie Teil (b) und Aufgabe 1, um die FOURIER-Koeffizienten der Funktion $|\cos x|$ zu bestimmen.

Lösung 3.

- (a) Bestimmung der FOURIER-Koeffizienten $\tilde{a}_n$ von g :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(kx) \cos(nx) dx = \frac{1}{k\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} f(x) \cos\left(\frac{n}{k}x\right) dx \\ &= \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f(x) \cos\left(\frac{n}{k}x\right) dx && (f \text{ und } \cos(\dots) \text{ sind } 2k\pi\text{-periodisch}) \\ &= \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sum_{l=0}^{k-1} \cos\left(\frac{n}{k}x + 2\pi \frac{nl}{k}\right) dx && (f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}) \end{aligned}$$

Falls k kein Teiler von n ist, verschwindet die Summe im Integral. Sonst gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = mk$, und es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \underbrace{\sum_{l=0}^{k-1} \cos(mx + 2\pi ml)}_{k \cos(mx)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m = a_{n/k}. && (f \text{ und } \cos(mx) \text{ sind } 2\pi\text{-periodisch}) \end{aligned}$$

Diese Rechnung schließt die Identität $\tilde{a}_0 = a_0$ mit ein. Eine ähnliche Rechnung liefert das analoge Ergebnis für $\tilde{b}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt gilt also

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} a_{n/k} & \text{falls } k \text{ Teiler ist von } n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{b}_n = \begin{cases} b_{n/k} & \text{falls } k \text{ Teiler ist von } n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sofern man vereinbart, daß die Null stets von k geteilt wird.

(b) Mit der Vereinbarung $b_0 = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \alpha) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(x) \cos(nx - n\alpha) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(x) (\cos(nx) \cos(n\alpha) + \sin(nx) \sin(n\alpha)) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \cos(n\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \sin(n\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
 &= \cos(n\alpha) a_n + \sin(n\alpha) b_n
 \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ (das enthält die Identität $\tilde{a}_0 = a_0$) und

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \alpha) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(x) \sin(nx - n\alpha) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(x) (\sin(nx) \cos(n\alpha) - \cos(nx) \sin(n\alpha)) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \cos(n\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx - \frac{1}{\pi} \sin(n\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\
 &= \cos(n\alpha) b_n - \sin(n\alpha) a_n
 \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dabei wurden die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$

ausgenutzt.

(c) Wiederum mit der Vereinbarung $b_0 = \beta_0 = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(y) h(x - y) dy \right] \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi-y}^{\pi-y} h(x) \cos(nx + ny) dx \right] f(y) dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi-y}^{\pi-y} h(x) (\cos(nx) \cos(ny) - \sin(nx) \sin(ny)) dx \right] f(y) dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\underbrace{\cos(ny) \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(nx) dx}_{\alpha_n} - \underbrace{\sin(ny) \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(nx) dx}_{\beta_n} \right] f(y) dy \\
 &= \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ny) dy - \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin(ny) dy \\
 &= \pi(\alpha_n a_n - \beta_n b_n)
 \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, sowie

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(y) h(x - y) dy \right] \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi-y}^{\pi-y} h(x) \sin(nx + ny) dx \right] f(y) dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi-y}^{\pi-y} h(x) (\sin(nx) \cos(ny) + \cos(nx) \sin(ny)) dx \right] f(y) dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\underbrace{\cos(ny) \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(nx) dx}_{\beta_n} + \underbrace{\sin(ny) \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(nx) dx}_{\alpha_n} \right] f(y) dy \\
 &= \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ny) dy + \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin(ny) dy \\
 &= \pi(\beta_n a_n + \alpha_n b_n)
 \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $|\cos x| = |\sin(x + \pi/2)|$ kann Teil (b) mit $\alpha = \pi/2$ verwendet werden, um die FOURIER-Koeffizienten von $|\cos x|$ zu bestimmen. Wegen $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Aufgabe 1) folgt

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n = \cos(n\pi/2)a_n &= \begin{cases} (-1)^{n/2}a_n & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} (-1)^{n/2+1}\frac{4}{(n^2-1)\pi} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \tilde{b}_n = -\sin(n\pi/2)a_n &= \begin{cases} (-1)^{(n+1)/2}a_n & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = 0.\end{aligned}$$

Die FOURIER-Reihe lautet dementsprechend

$$|\cos x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2kx)}{(2k)^2 - 1}.$$

Sie entspricht mit Ausnahme des alternierenden Vorzeichens der FOURIER-Reihe für $|\sin x|$.

Aufgabe 4. (Partialbruchzerlegung des Kotangens hyperbolicus)

Bestimmen Sie die FOURIER-Reihe der Funktion $f(x) = \cosh(\alpha x)$ auf $[-\pi, \pi]$ für $\alpha \neq 0$ (Hinweis: Die FOURIER-Reihe konvergiert punktweise gegen f). Setzen Sie einen geeigneten Wert für x ein, um die Partialbruchzerlegung

$$\pi \coth(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2}$$

von $\coth(\alpha\pi)$ für $\alpha \neq 0$ zu erhalten.

(Tip: Es gilt $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$. $\cosh x$ ist eine gerade, $\sinh x$ ist eine ungerade Funktion.)

Lösung 4.

Zur Erinnerung: Es gilt

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x.$$

Da $\cosh(\alpha x)$ eine gerade Funktion ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(\alpha x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\alpha\pi} \sinh(\alpha x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\alpha\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(\alpha x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \sinh(\alpha x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{n}{\alpha^2\pi} \cosh(\alpha x) \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{n^2}{\alpha^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(\alpha x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{n^2}{\alpha^2}\right)^{-1} \sinh(\alpha x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha}{n^2 + \alpha^2} \sinh(\alpha\pi) (-1)^n.\end{aligned}$$

Für a_0 erhält man

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(\alpha x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(\alpha x) dx = \frac{2}{\alpha\pi} \sinh(\alpha\pi).$$

Die FOURIER-Reihe lautet also

$$\cosh(\alpha x) \sim \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{n^2 + \alpha^2}.$$

Da die Reihe punktweise konvergiert, gilt sogar die Gleichheit. Durch Einsetzen von $x = \pi$ erhält man

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha\pi) &= \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha (-1)^n}{\alpha^2 + n^2} \\ \Leftrightarrow \quad \pi \coth(\alpha\pi) &= \pi \frac{\cosh(\alpha\pi)}{\sinh(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2}.\end{aligned}$$