Technische Universität Braunschweig

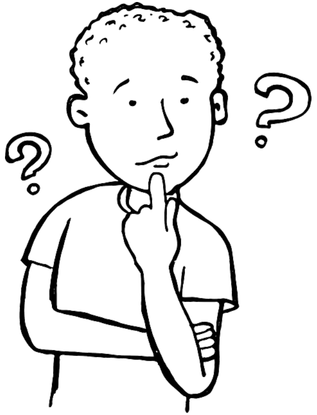
Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 1

Ramin Kosfeld und Chek-Manh Loi

16.11.2023

Heute: Beweise

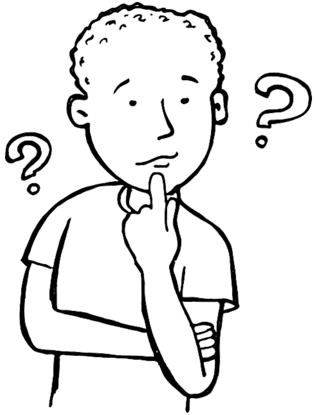
Mathematische Aussagen



Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- 13 ist eine gerade Zahl.
- Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $n(n+1)/2$.
- Die größte Primzahl ist $2^{82\,589\,933} - 1$
- Zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n-1$ Kanten besitzen mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.

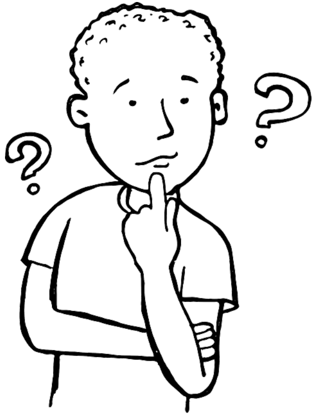
Mathematische Aussagen



Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- 13 ist eine gerade Zahl.
- Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass $2k = 13$
- Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $n(n+1)/2$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Die größte Primzahl ist $2^{82\,589\,933} - 1$
- Für jede Primzahl p gilt: $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$
- Zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n - 1$ Kanten besitzen mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Für alle zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n - 1$ Kanten gilt: es gibt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.
- Für jeden zusammenhängenden Graphen G, deren Knotengrade alle gerade sind, gilt: G besitzt eine Eulertour

Mathematische Aussagen



Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass $2k = 13$
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Für jede Primzahl p gilt: $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$
- Für alle zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n - 1$ Kanten gilt: es gibt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Für jeden zusammenhängenden Graphen G, deren Knotengrade alle gerade sind, gilt: G besitzt eine Eulertour

Welche Aussagen sind wahr?

Existenz- vs. Allaussagen

	Existenzaussage	**Allaussage**
Zeigen	*Beispiel* reicht als Beweis	Beweis
Widerlegen	Beweis	*Beispiel* reicht als Beweis

Negation einer Existenzaussage wird zu einer Allaussage.
Negation einer Allaussage wird zu einer Existenzaussage.

Logische Verknüpfungen

Negation („Nicht“, $\neg$)

Konjunktion („Und“, $\wedge$)

Disjunktion („Oder“, $\vee$)

Implikation („wenn…dann“, $\Rightarrow$)

Äquivalenz („genau dann wenn“, $\Leftrightarrow$)

Mathematische Aussagen →

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

1: Aussage ist *wahr*
0: Aussage ist *falsch*

Fragepause

Implikation & Äquivalenz I

In Beweisen (an der Tafel etc.) werden oft Implikations- und Äquivalenzpfeile einfach in den Fließtext eingebaut. Außerdem gibt es Formulierungen im Fließtext, die genau der Bedeutung der Implikation und Äquivalenz entsprechen:

Implikation

$\Rightarrow$

$$A \Rightarrow B$$

„wenn A gilt, dann gilt auch B“

„aus A folgt B“

„A impliziert B“

Äquivalenz

$\Leftrightarrow$

$$A \Leftrightarrow B$$

„A gilt genau dann, wenn B gilt“

„A und B sind äquivalent“

Implikation & Äquivalenz II

Implikation und Äquivalenzen sind *transitiv*:

$$\underbrace{A \Rightarrow B,\ \ B \Rightarrow C,\ \ C \Rightarrow D}_{A \Rightarrow D}$$

$$\underbrace{A \Leftrightarrow B,\ \ B \Leftrightarrow C,\ \ C \Leftrightarrow D}_{A \Leftrightarrow D}$$

Gelten alle oberen Aussagen, folgt daraus jeweils Aussage unter der Klammer. Die Klammer ist aber *keine* offizielle Schreibweise für eine Implikation (die letztendlich hier vorliegt), sondern hier nur zur Illustration.

Eine solche Verkettung von Aussagen ist oft die wesentliche Struktur eines Beweises.

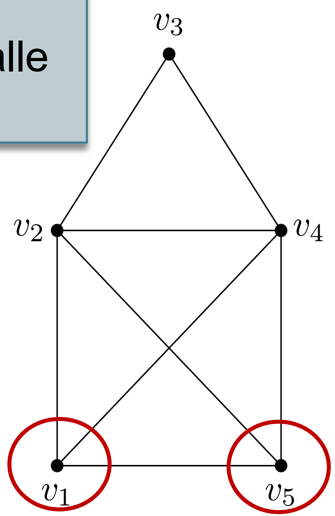
Beweistechniken – Teil 1

Aus der Vorlesung

Satz 2.4:
(1) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen Eulerweg besitzen, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.
(2) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann eine Eulertour besitzen, wenn alle Knoten geraden Grad besitzen.

Beweis: Gibt es in der Vorlesung.

Gibt es Graphen mit genau einem ungeraden Knoten?



„Handshake-Lemma“

Satz 2.5: Für jeden beliebigen einfachen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

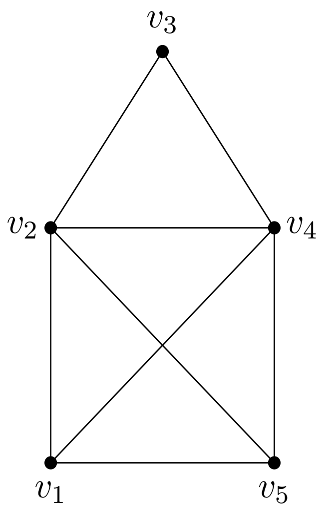
Beweis:
Betrachte Summe der Knotengrade

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i)$$

Jede Kante wird doppelt betrachtet, also

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$$

Das ist eine gerade Zahl!
Es kann also nur gerade viele Knoten ungeraden Grades geben.
(Gäbe es ungerade viele ungerade Grade, wäre auch die Gradsumme ungerade)



$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 3 + 4 + 2 + 4 + 3 = 16$$

Fragepause

Arten von Beweisen

- Direkter Beweis
- Kontraposition
- Widerspruchsbeweis

Direkter Beweis

Beweise – Direkter Beweis

Aussagen oft in der Form $A \Rightarrow B$. Unterscheide zwischen **Voraussetzung** (A) und **Schlussfolgerung** (B)

Wird die Schlussfolgerung durch eine logische Folgerungskette aus den Voraussetzungen hergeleitet, so spricht man von einem **direkten Beweis**.

Beispiel:
Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beispiel

Beispiel:

Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:

$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$??? \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Beispiel

Beispiel:
Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:
$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Monotonie der Wurzelfunktion
Und: $x, y \geq 0$

Beispiel

Beispiel:
Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:
$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \qquad |+4xy$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Beweise – Direkter Beweis

~~Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$~~

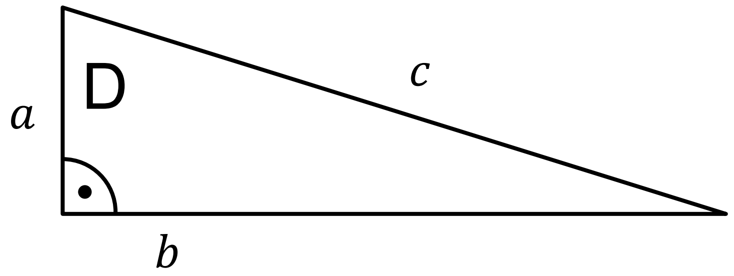
Beweis: … … …

Wo fange ich an?

Geht es hier überhaupt um Dreiecke?

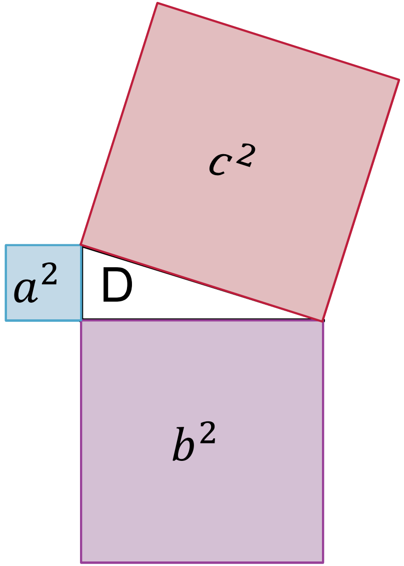
Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypothenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



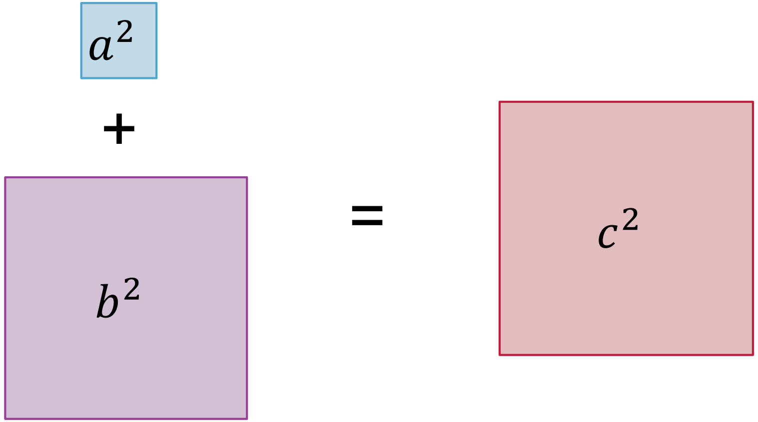
Beweise – Direkter Beweis

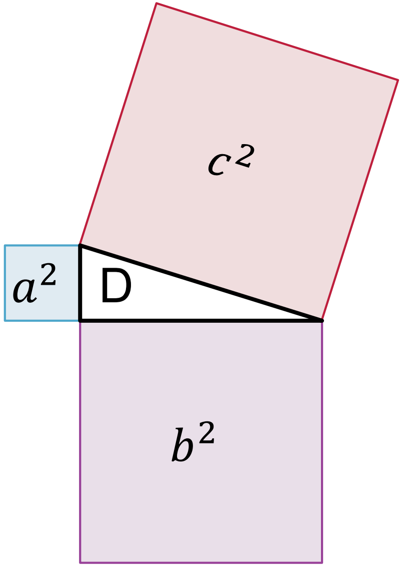
Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypothenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypothenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

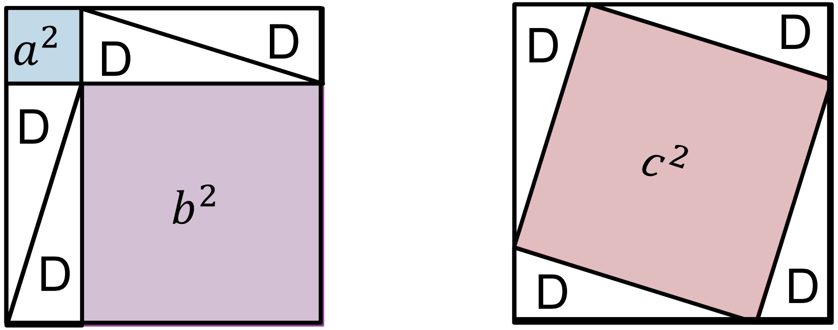


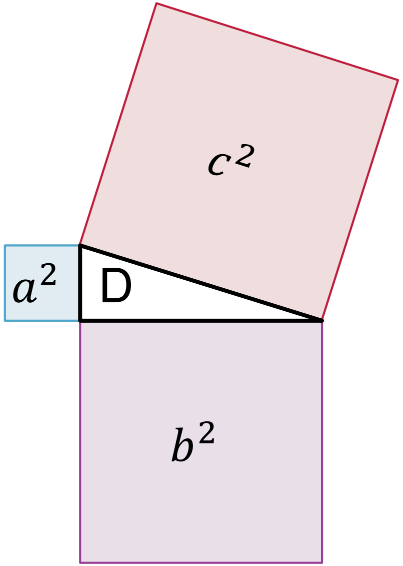


Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypothenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweis: Betrachte folgende Konstrukte:





Beides sind Quadrate mit Seitenlänge $a + b$
Also gilt $a^2 + b^2 + 4 \cdot Area(D) = c^2 + 4 \cdot Area(D)$
$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Kontrapostition

Beweise – Kontraposition

Ein direkter Beweis kann schwierig sein, sodass sich die **Kontraposition** anbietet.

Es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wir können also annehmen, dass B nicht gilt und folgern daraus, dass auch A nicht gelten kann.

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{Z}$. „Wenn n^2 ungerade ist, ist n ungerade“ wird zu „Wenn n gerade ist, ist n^2 gerade.“

Beweis: n gerade $\Rightarrow$ es ex. $k \in \mathbb{Z}$ mit $2k = n$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, also eine gerade Zahl.

Widerspruchsbeweis

Beweise – Widerspruch

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Um eine wahre Aussage zu beweisen, können wir zeigen, dass die Negation nicht gilt.
Diese Beweistechnik nennt man **Widerspruchsbeweis**.

Widerspruchsbeweis für Aussage A:

- Wir nehmen an: $\neg A$ gilt.
- Führe $\neg A$ zu einem *Widerspruch* ↯
- Die Annahme $\neg A$ muss falsch sein, denn sie ist widersprüchlich
- $\Rightarrow A$ muss wahr sein.

- Haben kein ganz genaues Ziel
- Nur: Wir wollen irgendwie zeigen, dass unter dieser Annahme was richtig böse kaputt ist

Widerspruchsbeweis - Beispiel

Beispiel: Besitzt ein zusammenhängender Graph G eine ***Brücke*** e, so besitzt G Knoten mit ungeradem Grad.

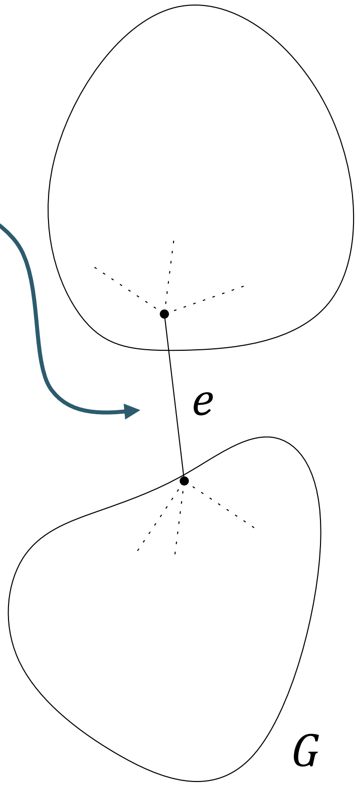
Beweis: *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

Also: Ein zusammenhängender Graph G besitzt eine Brücke *und* nur Knoten mit geradem Grad.

Dann existiert in G eine Eulertour.

Da e auf der Eulertour liegt und sein Entfernen G in zwei Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlassen, aber nicht dorthin zurückkehren.

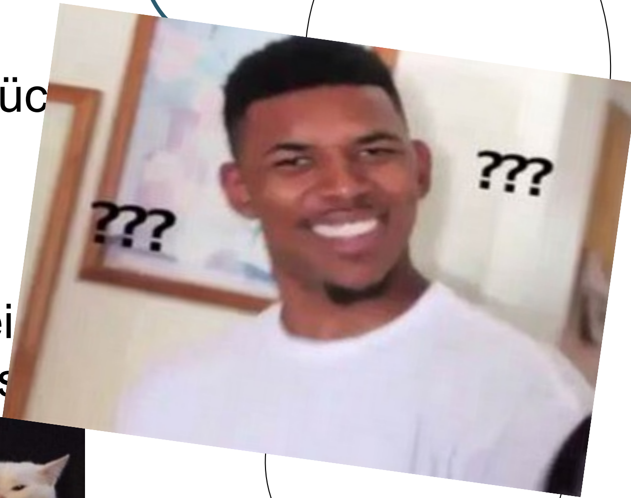
Wir können also keine Eulertour in G konstruieren.



Widerspruchsbeweis - Beispiel

Beispiel: Besitzt ein zusammenhängender Graph G eine ***Brücke*** e, so besitzt G Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis: *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

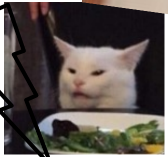


Also: Ein zusammenhängender Graph G besitzt eine Brüc
nur Knoten mit geradem Grad.

Dann existiert in G eine Eulertour.

Da e auf der Eulertour liegt und sein Entfernen G in zwei
Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlass
nicht dorthin zurückkehren.

Wir können also keine Eulertour in G konstruieren.



Die Annahme ist widersprüchlich, also muss die ursprüngliche Aussage gelten.

Äquivalenzen

Beweise – Äquivalenzen

Aussagen der Form $A \Leftrightarrow B$ können bewiesen werden, indem sowohl $A \Rightarrow B$ **und** $B \Rightarrow A$ gezeigt werden.

Bsp: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Eulertour, wenn jeder Knotengrad gerade ist.

Beweis $A \Leftrightarrow B$:

Beweis $A \Rightarrow B$

…

$\neg A \Rightarrow \neg B$ *

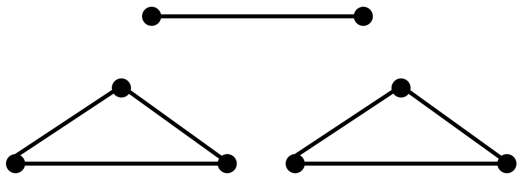
Beweis $\cancel{B \Rightarrow A}$

…

Aus beiden vorangegangenen Beweisen folgt $A \Leftrightarrow B$.

Um eine solche Aussage zu *widerlegen*, reicht es $A \Rightarrow B$ **oder** $B \Rightarrow A$ zu widerlegen.

Bsp: Ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn jeder Grad mindestens zwei ist.



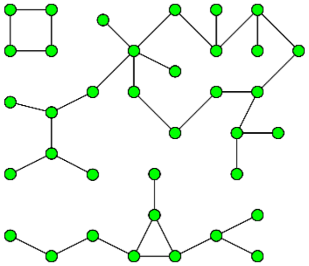
* auf einen oder auch beide Beweise kann man dann noch die Kontraposition anwenden, wie hier beispielhaft gezeigt

Fragepause

Mehr Beispiele

Zusammenhang von Graphen

https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory)



Satz: Wenn ein Graph G zusammenhängend ist, enthält er mindestens $n-1$ Kanten.

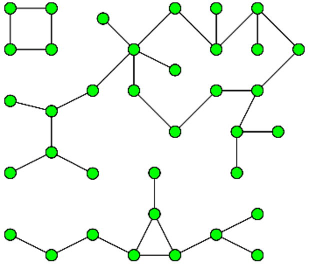
Beweis:
Fügt man eine Kante in einen Graphen ein, so kann sich die Anzahl an Komponenten nur um eins verringern.

Ein Graph ohne Kanten besitzt n Komponenten, ein zusammenhängender Graph nur eine Komponente.

Also müssen mindestens $n-1$ Kanten eingefügt werden, um Zusammenhang zu gewährleisten.

Kreise in Graphen

https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory)



Satz: Wenn jeder Knoten eines Graphen G einen Grad von mindestens zwei besitzt, enthält G einen Kreis.

Beweis:
Betrachte einen längsten Pfad $P \coloneqq v_1, v_2, \dots, v_i$ in G und einen Knoten v_j, der adjazent zu v_1 ist.

v_j muss auf P liegen, anderfalls könnte P erweitert werden.
Dann ist $K \coloneqq v_1, v_2, \dots, v_j, v_1$ ein Kreis in G.

Kreisfreie Graphen

Satz: Ist ein Graph G kreisfrei und zusammenhängend, dann enthält er exakt $n - 1$ Kanten.

Beweis:
Um zusammenhängend zu sein, brauchen wir mind. $n - 1$ Kanten.

Bleibt zu zeigen: Um kreisfrei zu sein, dürfen wir maximal $n - 1$ Kanten besitzen.
Annahme: Wir besitzen mindestens n Kanten. Wir folgern, dass G dann auch einen Kreis besitzt.

Entferne zunächst nach und nach alle Knoten mit Grad 1 samt Kante. Da wir das höchstens $n - k$ mal machen können (mit $0 < k$), bleiben k Knoten und $\geq k$ Kanten übrig.

Weiter bleibt ein Graph übrig, in dem jeder Knoten einen Grad von mindestens zwei besitzt. Er kann also nicht kreisfrei sein. Daraus folgt, dass auch G nie kreisfrei war.

Beweistechniken – Teil 2 (Teaser)

Beweise – Teil 2 (Teaser)

Beweise – Teil 2 (Teaser)

Merkzettel:

https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/proof-booklet.pdf