Technische Universität Braunschweig

# Algorithmen und Datenstrukturen
# Übung 1

Arne Schmidt

10.11.2022


SATZ: ALLE GERADEN ZAHLEN LASSEN SICH DURCH ZWEI TEILEN UND DAS ERGEBNIS IST 2.
BEWEIS: 4/2 = 2
imgflip.com

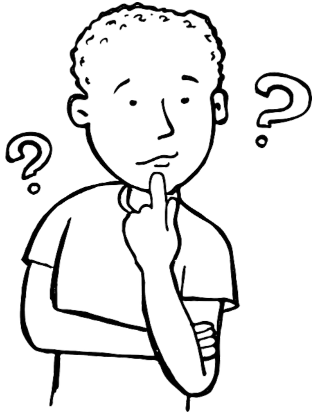

SATZ: ALLE GERADEN
ZAHLEN LASSEN SICH
GANZZAHLIG DURCH ZWEI TEILEN.
BEWEIS: 4/2 = 2
imgflip.com

# Beweise

https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/proof-booklet.pdf

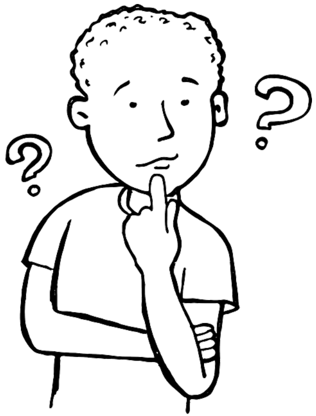
# Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.



1. 13 ist eine gerade Zahl.
2. Die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n+1)}{2}$.
3. Die größte Primzahl ist $2^{82\,589\,933} - 1$
4. Zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n-1$ Kanten besitzen mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
5. Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.

# Mathematische Aussagen




Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

1. Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass $2k = 13$
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Für jede Primzahl $p$ gilt: $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$
4. Für alle zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n-1$ Kanten gilt: es gibt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
5. Für jeden zusammenhängenden Graphen G, deren Knotengrade alle gerade sind, gilt: $G$ besitzt eine Eulertour

Welche Aussagen sind wahr?

# Existenz- vs. Allaussagen

| | Existenzaussage | Allaussage |
|---|---|---|
| **Zeigen** | Beispiel | Beweis |
| **Widerlegen** | Beweis | Beispiel |

**Negation** einer Existenzaussage wird zu einer Allaussage.
**Negation** einer Allaussage wird zu einer Existenzaussage.

# Logische Verknüpfungen

**Negation** („Nicht“, $\neg$)

**Konjunktion** („Und“, $\wedge$)

**Disjunktion** („Oder“, $\vee$)

**Implikation** („wenn…dann“, $\Rightarrow$)

**Äquivalenz** („genau dann wenn“, $\Leftrightarrow$)

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Fragepause

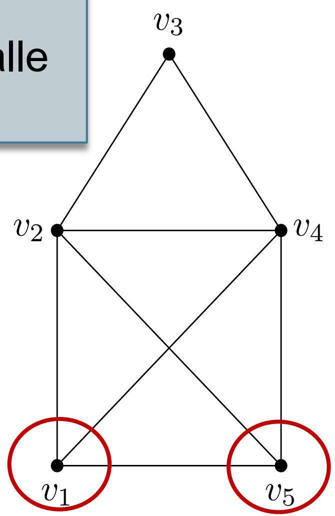
# Beweistechniken – Teil 1

# Aus der Vorlesung (nächste Woche)

**Satz 2.4**:
(1) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen Eulerweg besitzen, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.
(2) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann eine Eulertour besitzen, wenn alle Knoten geraden Grad besitzen.

*Beweis:* Gibt es in der Vorlesung.

*Gibt es Graphen mit genau einem ungeraden Knoten?*



# „Handshake-Lemma“

**Satz 2.5**: Für jeden beliebigen einfachen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

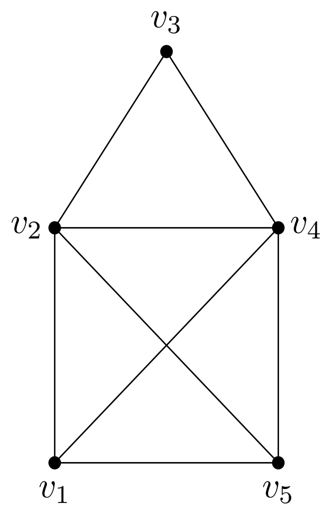
Beweis:
Betrachte Summe der Knotengrade

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i)$$

Jede Kante wird doppelt betrachtet, also

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$$

Das ist eine gerade Zahl!
Es kann also nur gerade viele Knoten ungeraden Grades geben.
(Gäbe es ungerade viele ungerade Grade, wäre auch die Gradsumme ungerade)




$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 3 + 4 + 2 + 4 + 3 = 16$$

# Fragepause

# Direkter Beweis

# Beweise – Direkter Beweis

Aussagen oft in der Form $A \Rightarrow B$. Unterscheide zwischen **Voraussetzung** (A) und **Schlussfolgerung** (B)

Wird die Schlussfolgerung durch eine logische Folgerungskette aus den Voraussetzungen hergeleitet, so spricht man von einem **direkten Beweis**.

Beispiel:
Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

# Beispiel

Beispiel:
Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:
$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$???\Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

# Beispiel

Beispiel:
Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:
$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Monotonie der Wurzelfunktion
Und: $x, y \geq 0$

# Beispiel

Beispiel:
Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:
$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \qquad |+4xy$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

# Beweise – Direkter Beweis

~~Satz des Py~~ $x^2 + y^2 = z^2$

Beweis: … … …

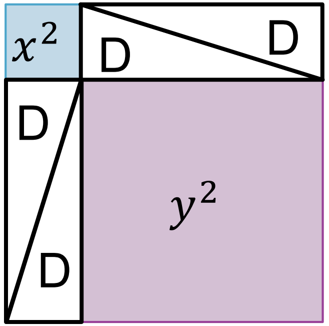
Wo fange ich an?

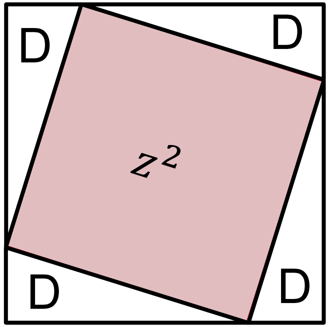
Geht es hier überhaupt um Dreiecke?

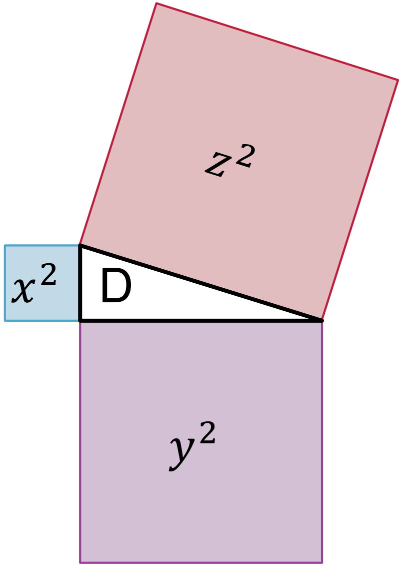

# Beweise – Direkter Beweis

**Satz des Pythagoras:** Für ein rechtwinkliges Dreieck $D$ mit Kathetenlängen $x$ und $y$, und Hypothenusenlänge $z$ gilt $x^2 + y^2 = z^2$.

Beweis: Betrachte folgende Konstrukte:




Beides sind Quadrate mit Seitenlänge $x + y$

Also gilt $x^2 + y^2 + 4 \cdot Area(D) = z^2 + 4 \cdot Area(D)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2$

# Kontrapostition

# Beweise – Kontraposition

Ein direkter Beweis kann schwierig sein, sodass sich die **Kontraposition** anbietet.
Es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wir können also Annehmen, dass B nicht gilt und folgern daraus, dass auch A nicht gelten kann.

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{Z}$. „Wenn $n^2$ ungerade ist, ist $n$ ungerade“ wird zu „Wenn $n$ gerade ist, ist $n^2$ gerade.“

Beweis: $n$ gerade $\Rightarrow$ Es ex. $k \in \mathbb{Z}$ mit $2k = n$
$\Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, also eine gerade Zahl

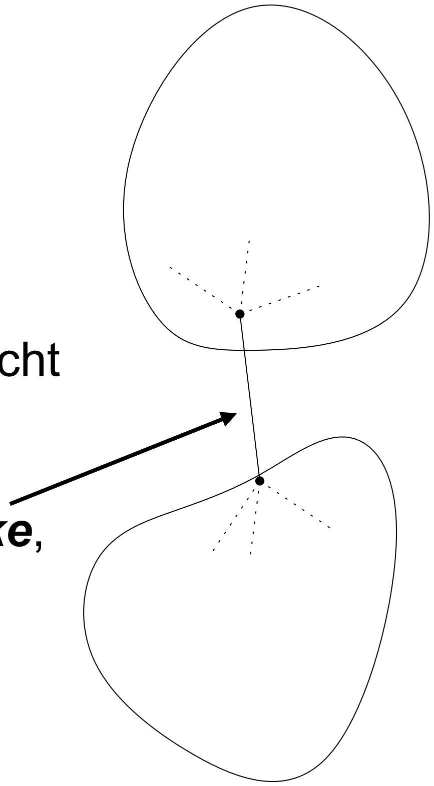
# Widerspruchsbeweis

# Beweise – Widerspruch

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Um eine wahre Aussage zu beweisen, können wir zeigen, dass die Negation nicht gilt.
Diese Beweistechnik nennt man **Widerspruchsbeweis**.

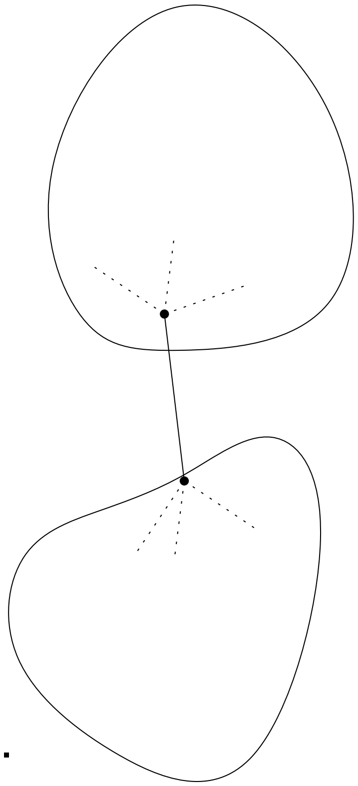
Bei einer Implikation $(A \Rightarrow B)$ zeigt man also, dass $A$ und $\neg B$ nicht gleichzeitig gelten können.

Beispiel: Besitzt ein zusammenhängender Graph $G$ eine ***Brücke***, so besitzt $G$ Knoten mit ungeradem Grad.



# Beweise – Widerspruch

**Beispiel**: Besitzt ein zusammenhängender Graph $G$ eine ***Brücke***, so besitzt $G$ Knoten mit ungeradem Grad.



**Beweis**: Angenommen, $G$ besitzt nur Knoten geraden Grades. Dann existiert in $G$ eine Eulertour.

Da $e$ auf der Eulertour liegt und sein Entfernen $G$ in zwei Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlassen, aber nicht dorthin zurückkehren. Wir können also keine Eulertour konstruieren (ansonsten wäre $e$ keine Brücke).

Also muss $G$ mindestens ein Knoten mit ungeradem Grad besitzen.

# Äquivalenzen

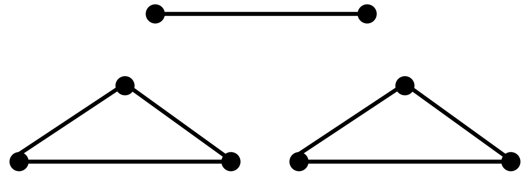
# Beweise – Äquivalenzen

Aussagen der Form $A \Leftrightarrow B$ können *bewiesen* werden, indem sowohl $A \Rightarrow B$ **und** $B \Rightarrow A$ gezeigt werden

**Bsp**: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Eulertour, wenn jeder Knotengrad gerade ist.

Um eine solche Aussage zu *widerlegen*, reicht es $A \Rightarrow B$ **oder** $B \Rightarrow A$ zu widerlegen.

**Bsp**: Ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn jeder Grad mindestens zwei ist.

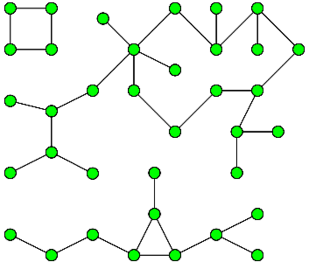


# Fragepause

# Mehr Beispiele

# Zusammenhang von Graphen

https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory)



**Satz:** Wenn ein Graph $G$ zusammenhängend ist, enthält er mindestens $n-1$ Kanten.

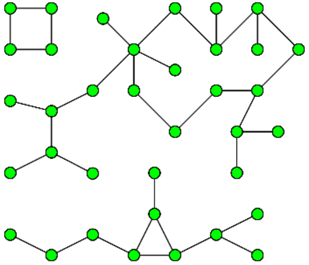
*Beweis:*
Fügt man eine Kante in einen Graphen ein, so kann sich die Anzahl an Komponenten nur um eins verringern.

Ein Graph ohne Kanten besitzt $n$ Komponenten, ein zusammenhängender Graph nur eine Komponente.

Also müssen mindestens $n-1$ Kanten eingefügt werden, um Zusammenhang zu gewährleisten.

# Kreise in Graphen

https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory)



**Satz:** Wenn jeder Knoten eines Graphen $G$ einen Grad von mindestens zwei besitzt, enthält $G$ einen Kreis.

*Beweis:*

Betrachte einen längsten Pfad $P \coloneqq v_1, v_2, \dots, v_i$ in $G$ und einen Knoten $v_j$, der adjazent zu $v_1$ ist.

$v_j$ muss auf $P$ liegen, anderfalls könnte $P$ erweitert werden.

Dann ist $K \coloneqq v_1, v_2, \dots, v_j, v_1$ ein Kreis in $G$.

# Kreisfreie Graphen

**Satz:** Ist ein Graph $G$ kreisfrei und zusammen-hängend, dann enthält er exakt $n-1$ Kanten.

*Beweis:*
Um zusammenhängend zu sein, brauchen wir mind. $n-1$ Kanten.

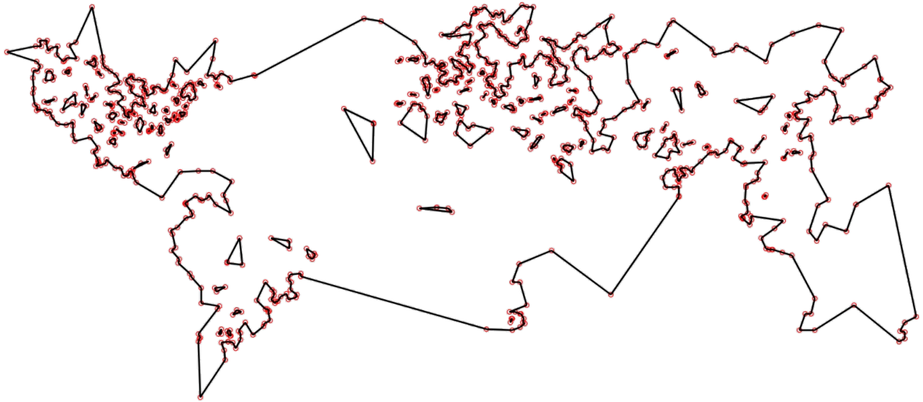
Bleibt zu zeigen: Um kreisfrei zu sein, dürfen wir maximal $n-1$ Kanten besitzen.
Annahme: Wir besitzen mindestens $n$ Kanten. Wir folgern, dass $G$ dann auch einen Kreis besitzt.

Entferne zunächst nach und nach alle Knoten mit Grad 1 samt Kante. Da wir das höchstens $n-k$ mal machen können (mit $0<k$), bleiben $k$ Knoten und $\geq k$ Kanten übrig.

Weiter bleibt ein Graph übrig, in dem jeder Knoten einen Grad von mindestens zwei besitzt. Er kann also nicht kreisfrei sein. Daraus folgt, dass auch $G$ nie kreisfrei war.

# Beweistechniken – Teil 2 (Teaser)

# Beweise – Teil 2 (Teaser)

# Nächste Woche: Polygonalisierungen (Exkurs)