Insgesamt benötigen wir also

$$\Theta(n \log_2 m) \quad \text{Bits}.$$

Jetzt ist $\quad m \le n^2,$

also $\quad \log_2 m \le \log_2 n^2 = 2 \log_2 n,$

d.h. $\quad n \log m \le 2n \log n,$

und der insgesamt verbrauchte Speicherplatz ist

$$\Theta(n \log m + m \log n) = \Theta(m \log n).$$

3.7 Wachstum von Funktionen

Im letzten Abschnitt haben wir Funktionen abgeschätzt und auf die „wesentlichen" Bestandteile reduziert, um Größenordnungen und Wachstumsverhalten zu beschreiben. Ein bisschen formaler:

Definition 3.9 (Θ-Notation)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt

$f \in \Theta(g) :\Leftrightarrow$ Es gibt positive Konstanten c_1, c_2, n_0 mit $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ für alle $n \ge n_0$.

Man sagt: f wächst asymptotisch in derselben Größenordnung wie g.

Beispiele: $\quad 2n^2 - 1 \in \Theta(n^2)$

$$\frac{n^3}{1000} + n^2 + n \log n \in \Theta(n^3)$$

Manchmal hat man nur untere oder obere Abschätzungen:

DEFINITION 3.10 (O-Notation)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt $f \in \Theta(g)$ $:\Leftrightarrow$ Es gibt positive Konstanten c, n_0 mit

$$0 \leq f(n) \leq c\,g(n) \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Man sagt: f wächst ~~exponentiell~~ höchstens in derselben Größenordnung wie g.

Beispiele:

$$2n^2 - 1 \in O(n^2)$$
$$2n^2 - 1 \in O(n^3)$$
$$n \log n \in O(n^2)$$

DEFINITION 3.11 (Ω-Notation)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt $f \in \Omega(g)$ $:\Leftrightarrow$ Es gibt positive Konstanten c, n_0 mit

$$0 \leq c\,g(n) \leq f(n) \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Beispiele: $2n^2 - 1 \in \Omega(n^2)$

$2n^3 - 1 \in \Omega(n^2)$

Einige einfache Eigenschaften:

SATZ 3.12

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt

(1) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f)$

(2) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in O(g)$ und $f \in \Omega(g)$.

(3) $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$

Beweis: Übung!