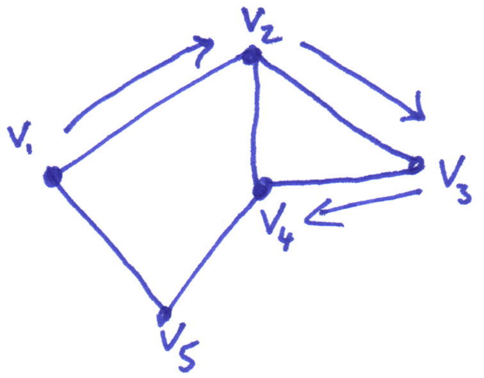
Jetzt machen wir uns Gedanken über die Art und Weise, wie man in einem Graphen umherwandern kann!



Laufe von v_1
nach v_2
nach v_3
nach v_4 !

Definition 2.2 (Wege in Graphen)

(1) (i) Eine Kante $e = \{v, w\}$ in einem einfachen Graphen <u>verbindet</u> v und w, und v und w sind <u>adjazent</u> („benachbart"), v ist Nachbar von w.

(ii) Außerdem ist v <u>inzident</u> zu e.
(„zusammentreffend mit")

(2) (i) Ein Teilgraph $H = (V(H), E(H))$ eines Graphen $G = (V(G), E(G))$ ist ein Graph mit

$$V(H) \subseteq V(G)$$
$$E(H) \subseteq E(G)$$

Teilmengen.

(ii) H ist aufspannend, wenn $V(H) = V(G)$
(Alle Knoten sind mit dabei!)

(3) (i) Eine <u>Kantenfolge</u> W in G ist eine Folge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, e_k, v_{k+1}$$

mit $k \geq 0$, $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$

(ii) Wiederholt sich keine Kante in einer Kantenfolge, dann spricht man von einem <u>Weg</u>.

(iii) Wiederholt sich kein Knoten, spricht man von einem <u>Pfad</u>.

(iv) Ein <u>geschlossener Weg</u> kehrt am Ende zum Startknoten zurück. (Auch gebräuchlich: <u>Tour</u>)

(v) Ein <u>Kreis</u> ist ein geschlossener Pfad
(→ Rückkehr zum Startknoten)

(vi) Ein <u>Eulerweg</u> benutzt alle Kanten eines Graphen.
Eine <u>Eulertour</u> kehrt außerdem zum Start zurück.

(vii) Ein <u>Hamiltonpfad</u> besucht alle Knoten eines Graphen.

Sir William Hamilton
* 1805 † 1865

(viii) Ein <u>Hamiltonkreis</u> besucht alle Knoten eines Graphen und kehrt zum Startknoten zurück.
(Manchmal auch: <u>Tour</u>)

(4) Ein Graph ist zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt.

(5) Der Grad eines Knotens ist die Anzahl der inzidenten Kanten. (Schreibweise: $\delta(v)$.)

2.3 Eulerwege

Damit können wir das Problem von Euler sauber festhalten!

PROBLEM 2.3 (Eulerweg)

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Ein Eulerweg W in G

- oder ein Argument, dass kein Eulerweg existiert

Jetzt halten wir die Beobachtung über ungerade Knoten fest:

SATZ 2.4 (Euler)

(1) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen ~~geschlossenen~~ Eulerweg haben, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.

(2) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen geschlossenen Eulerweg haben, wenn alle Knoten geraden Grad haben.

Beweis:

Sei v ein Knoten mit ungeradem Grad $\delta(v)$. Dann kann die Zahl der in einem Eulerweg W zu v hinführenden Kanten nicht gleich der ~~von~~ v wegführenden Kanten sein. Also muss W in v beginnen oder enden. Damit:

(1) Es gibt in einem Eulerweg nur einen Start- und einen Endknoten.

(2) Bei einem geschlossenen Eulerweg gibt es für den Start- und Zielknoten w gleich viele hin- und wegführende Kanten. Also ist auch $\delta(w)$ gerade.

$\square$

FRAGEN:

(I) Was ist mit Graphen, in denen nur ein Knoten ungeraden Grad hat?

(II) Die Bedingungen oben sind notwendig, d.h. sie müssen auf jeden Fall erfüllt werden, wenn es eine Chance auf einen Eulerweg geben soll. Sind sie auch hinreichend, d.h. gibt es bei Erfüllung auch wirklich einen Weg?

(III) Wie findet man einen Eulerweg?

(III') Wie sieht ein Algorithmus zum Finden eines Eulerweges aus?

Antwort auf (I) - etwas allgemeiner:

SATZ 2.5 („Handshake-Lemma")

Für jeden beliebigen einfachen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad eine gerade Zahl.

Beweis: Übung!

Es kann also nicht vorkommen, dass es nur einen Knoten mit ungeradem Grad gibt.