Satz 3.18

(3) Am Ende ist für jeden erreichbaren Knoten $v \in Y$ die Länge eines Kürzesten Weges von s nach v im Baum (Y,T) durch $\ell(v)$ gegeben.

(4) Am Ende ist für jeden erreichbaren Knoten $v \in Y$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v im Graphen (V,E) durch $\ell(v)$ gegeben.

Beweis:

(3) Sei $d_{(Y,T)}$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v in (Y,T). Dann zeigen wir durch Induktion über $d_{(Y,T)}(s,v)$, dass für alle Knoten $d_{(Y,T)}(s,v) = \ell(v)$ gilt:

Induktionsanfang:

$d_{(Y,T)}(s,v) = 0$ gilt für $v=s$, und $\ell(s)=0$

Induktionsannahme:

Sei $d_{(Y,T)}(s,v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$ mit $d_{(Y,T)}(s,v) \leq k-1$

Induktionsschritt:

sei $w \in V$ ein Knoten mit $d_{(Y,T)} = k$.

Dann gibt es im Baum (Y,T) einen eindeutigen Weg von s zu w. Sei v der Vorgänger von w in diesem Weg, also $\{v,w\} \in T$.

Nach Induktionsannahme gilt

$$d_{(Y,T)}(s,v) = \ell(v),$$

außerdem ist

$$d_{(Y,T)}(s,w) = d_{(Y,T)}(s,v)+1$$ (Abstand im Baum)

und

$$\ell(w) = \ell(v)+1.$$ (wird in Alg 3.17 gesetzt)

Also auch $d_{(Y,T)}(s,w) = \ell(w)$

– und die Behauptung gilt.

(4) Wir brauchen zunächst eine Eigenschaft der Warteschlange R:

(*) Zu jedem Zeitpunkt gilt für die Warteschlange $R: v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$, dass $\ell(v_i) \leq \dots \leq \ell(v_k) \leq \ell(v_i)+1$,

Beweis durch Induktion über die Zahl z der aufgenommenen Kanten:

<u>Induktionsanfang:</u> $z=0$

Hier besteht die Warteschlange nur aus s, und (*) gilt.

<u>Induktionsannahme:</u>

Die Aussage gelte nach $z-1$ Kanten. Sei $R: v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$ und

$$\ell(v_i) \leq \ell(v_{i+1}) \leq \dots \leq \ell(v_k) \leq \ell(v_i)+1$$

<u>Induktionsschritt:</u>

Wir fügen eine weitere Kante ein. Werden dafür zunächst Knoten aus R gelöscht (weil sie keine neuen Nachbarn haben), ändert das nichts an (*). Sei v_j danach der erste Knoten, für den eine neue Kante $e = \{v_j, v_{k+1}\}$ eingefügt wird. Dann bekommt man

$$R: v_j, v_{j+1}, \dots, v_k, v_{k+1}$$

mit $\quad \ell(v_i) \leq \dots \leq \ell(v_j) \leq \dots \leq \ell(v_k) \leq \ell(v_i)+1$

Wegen $\ell(v_i) \leq \ell(v_j)$ gilt auch $\ell(v_i)+1 \leq \ell(v_j)+1 = \ell(v_{k+1})$.

Damit erhält man

$$\ell(v_j) \leq \dots \leq \ell(v_k) \leq \ell(v_i)+1 \leq \ell(v_j)+1 = \ell(v_{k+1}),$$

und (*) gilt weiterhin.

Jetzt nehmen wir an, dass es am Ende des Algorithmus 3.17 einen Knoten w gibt, für den nicht ein kürzester Weg gefunden wurde, also

$$d(s,w) < d_{(Y,T)}(s,w) = \ell(w).$$

Unter den Knoten mit dieser Eigenschaft wählen wir einen mit minimalem Abstand von s in G.

Sei P ein kürzester s-w-Weg in G, und sei $e = \{v,w\}$ die letzte Kante in P, d.h. $d(s,w) = d(s,v) + 1$.

Wir haben $d(s,v) = d_{(Y,T)}(s,v)$,
aber $d(s,w) < d_{(Y,T)}(s,w)$,
also gehört e nicht zu T.

Außerdem ist

$$\ell(w) = d_{(Y,T)}(s,w) > d(s,w) = d(s,v) + 1$$
$$= d_{(Y,T)}(s,v) + 1 = \ell(v) + 1.$$

Wäre $w \in Y$, hätten wir wegen

$$\ell(w) > \ell(v) + 1$$

also einen Widerspruch zu Eigenschaft (*).

Also wäre $w \notin Y$. Dann wäre die Kante $e = \{v,w\}$ zum Zeitpunkt der Entfernung von v aus R aber eine Verbindung von v mit einem Knoten $w \notin Y$, im Widerspruch zur Abfrage in .

$\square$