Mathematische Methoden der Algorithmik

Dozent: Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Assistent: Nils Schweer
Digitalisierung: Winfried Hellmann

Wintersemester 2008/2009

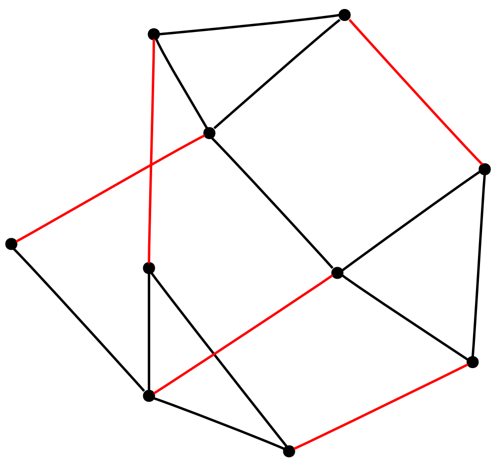
Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

4. November 2008

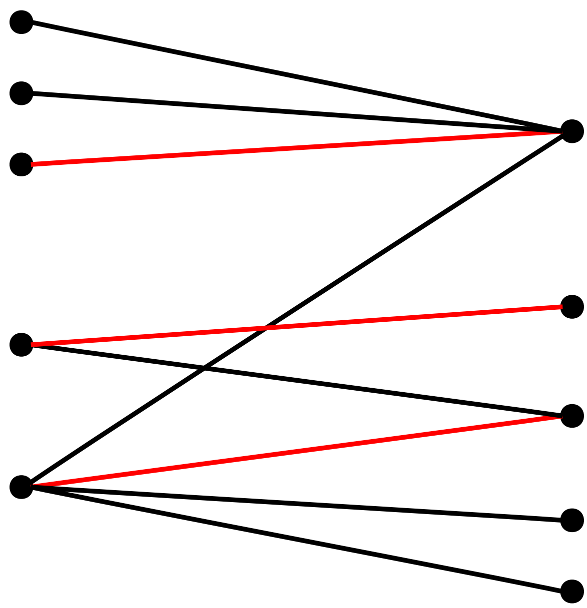
Problem 1.1 (Maximales Matching):

Gegeben: Ein Graph $G = \langle V, E \rangle$



Gesucht: Eine möglichst große Menge disjunkter Kanten

Spezialfall: Bipartiter Graph



Also:

Gesucht: (1) zulässige Lösung
(2) möglichst gute Schranke

Beispiel 1.2 (Ernährungsproblem):
Erforderlich pro Tag:

- 2000 kcal
- 55g Eiweiß
- 800mg Calcium

(Eisen und Vitamine über Pillen, damit das Beispiel einfach bleibt!)

Nahrungsmittel:	**Portions-größe**	**Energie** ($kcal$)	**Eiweiß** (g)	**Calcium** (mg)	**Kosten** (€)
Haferflocken	25g	110	4	2	0,10
Hühnchen	100g	205	32	12	1,00
Eier	2 *Stück*	160	13	54	0,30
Vollmilch	250ml	160	8	285	0,15
Kirschkuchen	170g	420	4	22	1,00
Labskaus	260g	260	14	80	0,49

Tabelle 1.1: Beispielwerte

Gesucht: Ein täglicher Ernährungsplan, der ausreichende Mengen von allen Nährstoffen zu Verfügung stellt und dabei möglichst günstig ist.

Wie löst man so etwas?

→ Ausprobieren?

z.B. 10 Portionen Labskaus ginge (mathematisch gesehen)

Kosten: 4,90 € (soziale und psychische Kosten unberücksichtigt)

Andere Möglichkeit:

	3 Portionen Milch (wegen Calcium)	→	855mg Calcium,	24g Eiweiß,	480kcal
+	1 Portion Hühnchen (wegen Eiweiß)	→	867mg Calcium,	56g Eiweiß,	685kcal
⇒	Es fehlen: 1315 kcal				

Haferflocken:	11
Hühnchen:	2,05
Eier:	5,33
Vollmilch:	10,67
Kirschkuchen:	4,2
Labskaus:	5,31

Tabelle 1.2: kcal pro ¢

12 Portionen Hafer ergeben 1320kcal

Kosten: 2,65 €

Geht das besser?

Ja, Bedingung überfüllt! (Energie $2005kcal$)

Formulierung dazu:

Betrachte Variabe $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (für Menge der Nahrungsmittel)
In der ersten Lösung: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,\ x_6 = 10$

In der zweiten Lösung: $x_1 = 12,\ x_2 = 1,\ x_4 = 3,\ x_3 = x_5 = x_6 = 0$
Damit:

$$\begin{aligned} 2000 &\leq 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \\ 55 &\leq 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \\ 800 &\leq 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \end{aligned}$$

(statt $\leq$ wäre auch $=$ möglich)

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$
$$10x_1 + 100x_2 + 30x_3 + 15x_4 + 100x_5 + 49x_6 = \min$$

$\Rightarrow$ Ein lineares Optimierungsproblem!

Ein lineares Optimierungsproblem für Matching:

$$x_e = \begin{cases} 1, \text{ wenn Kante ausgewählt} \\ 0, \text{ wenn nicht ausgewählt} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} x_{1,6} + x_{1,7} & \leq 1 \\ x_{2,7} + x_{2,8} + x_{2,9} + x_{2,10} & \leq 1 \\ x_{3,6} & \leq 1 \\ x_{4,6} & \leq 1 \\ x_{5,7} & \leq 1 \\ x_{1,6} + x_{3,6} + x_{4,6} & \leq 1 \\ x_{1,7} + x_{2,7} + x_{3,7} & \leq 1 \\ x_{2,8} & \leq 1 \\ x_{2,9} & \leq 1 \\ x_{2,10} & \leq 1 \\ x_{i,j} \in \{0,1\} & \leftarrow \text{ganzzahliges Problem!} \end{array}$$

Zielfunktion:

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,5,\\ j=6,\ldots,10}} x_{i,j}$$

Gesucht: Untere Schranke für Ernährungsproblem!

Idee: Kosten für Nährstoffe, z.B. Calcium berechnen

$\Rightarrow$ Wir nehmen Vollmilch und bezahlen $800 \cdot \frac{15}{285}$¢ ≈ 42¢

Analog für Energie:

Haferflocken		5¢
Hühnchen	$\frac{100}{12}$¢ ≈	8¢
Eier	$\frac{30}{54}$¢ ≈	0,6¢
Vollmilch	$\frac{15}{285}$¢ ≈	0,05¢
Kirschkuchen	$\frac{100}{22}$¢ ≈	5¢
Labskaus	$\frac{49}{80}$¢ ≈	0,6¢

Tabelle 1.3: Kosten für 1mg Calcium

Es gibt höchstens $11kcal/$¢, also bezahlen wir mindestens

$$\frac{2000}{11}\text{¢} \approx 181,\bar{81}\text{¢}$$

Anders argumentiert:

$$\frac{1}{11}\left(110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6\right) \geq \frac{2000}{11}$$

$$10x_1 + \frac{205}{11}x_2 + \frac{160}{11}x_3 + \frac{160}{11}x_4 + \frac{420}{11}x_5 + \frac{260}{11}x_6 \geq \frac{2000}{11}$$

Minimale Kosten:

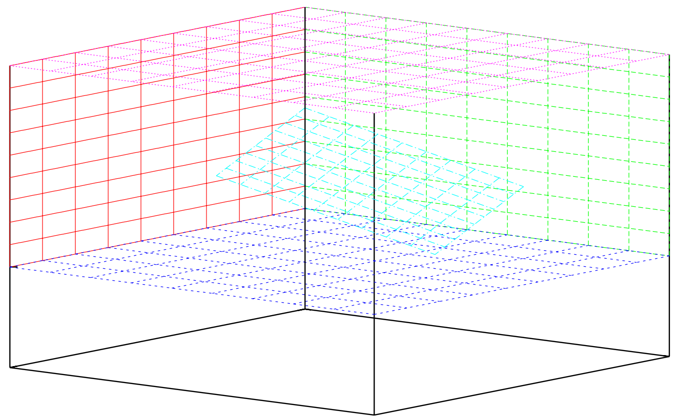
$$\begin{aligned} & 10x_1 + 100x_2 + 30x_3 + 15x_4 + 100x_5 + 49x_6 \\ \geq\ & 10x_1 + \frac{205}{11}x_2 + \frac{160}{11}x_3 + \frac{160}{11}x_4 + \frac{420}{11}x_5 + \frac{260}{11}x_6 \\ \geq\ & \frac{2000}{11} \end{aligned}$$

11. November 2008

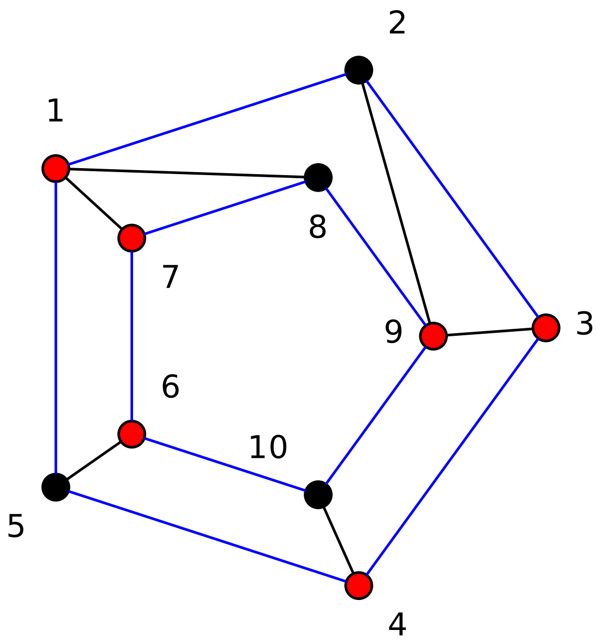
$$\begin{aligned} 2000 &\leq 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \\ 55 &\leq 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \\ 800 &\leq 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Lösungsraum:



Vertex Cover:



Gegeben: Graph $G = \langle V, E\rangle$

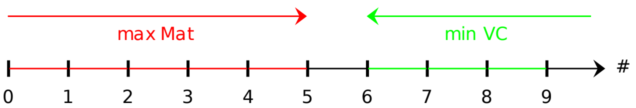
Gesucht : $S \subseteq V$ möglichst klein
mit $(\forall e = \{v, w\} \in E) : v \in S$ oder $w \in S$

Beobachtung 1.3 (Dualität Vertex Cover und Matching):

$$\max\ Mat \leq \min\ VC$$

Beweis:
Sei M_* ein größtmöglichstes Matching, bestehend aus $|M_*|$ vielen disjunkten Kanten. Jedes Vertex Cover (also auch ein optimales) muss alle Kanten überdecken, also auch die von M_*. Ein Knoten kann aber nur eine Kante von M_* gleichzeitig überdecken, d.h. wir brauchen alleine schon für die Kanten in M_* mindestens $|M_*|$ Knoten. $\square$

Also haben wir folgende Situation:



Man nennt zwei derartige Probleme *dual* zueinander.

$\rightarrow$ Das ist entscheidend für Optimierungsprobleme, denn zum Optimieren brauchen wir letztlich:

(1) eine zulässige Lösung

(2) ein Argument, dass diese Lösung gut (oder sogar optimal) ist, also gute Schranken

Im Beispiel macht man sich anhand der beiden blau markierten Kreise der Länge 5 klar, dass man für ein Vertex Cover mindestens $2 \cdot 3 = 6$ Knoten braucht, d.h. $max\ Mat < min\ VC$.

Zurück zum Ernährungsproblem:

Wie sieht es hier mit Schranken aus?

Schreibweise:

Wir können das Problem schreiben als:

$$\sum_{i=1}^{6} a_{1i}x_i \geq b_1 \qquad \sum_{i=1}^{6} a_{2i}x_i \geq b_2 \qquad \sum_{i=1}^{6} a_{3i}x_i \geq b_3$$

$$\min \sum_{i=1}^{6} c_i x_i \qquad (x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, 6)$$

Noch kompakter:

$$\min\ c^T x$$

$$Ax \geq b$$

($\geq$ gilt für alle Komponenten)

$$x \geq 0$$

mit Vektoren $c, x \in \mathbb{R}^6$, $b \in \mathbb{R}^3$, Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 6}$

Idee für Schranken beim Ernährungsproblem:

(1) bilde (nichtnegative) Linearkombinationen von Ungleichungen

(2) benutze diese, um die Zielfunktion abzuschätzen

Das liefert

$$\begin{aligned}
&10x_1 + \tfrac{205}{11}x_2 + \tfrac{160}{11}x_3 + \tfrac{160}{11}x_4 + \tfrac{420}{11}x_5 + \tfrac{260}{11}x_6 \geq \tfrac{2000}{11} && (1)\\
&\leq 10x_1 + 100x_2 + 30x_3 + 15x_4 + 100x_5 + 49x_6 && (2)
\end{aligned}$$

(denn $(10, \frac{205}{11}, \frac{160}{11}, \frac{160}{11}, \frac{420}{11}, \frac{260}{11}) \leq (10, 100, 30, 15, 100, 49)$ und $(x_1, \ldots, x_6) \geq 0$)

Wie geht das allgemeiner?

Die Koeffizienten (nennen wir sie y_1, y_2, y_3) müssen erfüllen:

(1) $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

(2)

$$\begin{array}{rrrr}
110 \cdot y_1 + & 3 \cdot y_2 + & 2 \cdot y_3 \leq & 10\\
205 \cdot y_1 + & 32 \cdot y_2 + & 12 \cdot y_3 \leq & 100\\
160 \cdot y_1 + & 13 \cdot y_2 + & 54 \cdot y_3 \leq & 30\\
160 \cdot y_1 + & 8 \cdot y_2 + & 285 \cdot y_3 \leq & 15\\
420 \cdot y_1 + & 4 \cdot y_2 + & 22 \cdot y_3 \leq & 100\\
260 \cdot y_1 + & 14 \cdot y_2 + & 80 \cdot y_3 \leq & 49
\end{array}$$

Dann ist $y_1 \cdot 200 + y_2 \cdot 55 + y_3 \cdot 800$ eine untere Schranke.

Für eine möglichst gute Schranke auf diese Weise, bestimme also

$$\max\ 2000y_1 + 55y_2 + 800y_3$$

mit den angegebenen Nebenbedingungen. D.h. wir betrachten Schranken für

$$\begin{array}{ll}
\min & c^T x\\
\text{unter} & Ax \geq b\\
& x \geq 0
\end{array}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} \max \quad & y^T b \\ \text{unter} \quad & y^T A \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Wir haben also

(1) zwei Optimierungsprobleme, die sich
(2) gegenseitig beschränken

(Duale Optimierungsprobleme)

Noch einmal festgehalten:

Satz 1.4 (Schwache Dualität linearer Optimierungsprobleme):
Seien

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \max \quad & y^T b \\ \text{unter} \quad & y^T A \leq c^T \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

beide zulässig, d.h. es gibt jeweils mindestens ein x_0 und ein y_0, die die Nebenbedingungen erüllen. Dann gilt

$$c^T x_0 \geq y_0^T b, \quad \text{also auch} \quad \min\ c^T x \geq \max\ y^T b.$$

Beweis:
Es gelte

$$Ax_0 \geq b,\ x_0 \geq 0$$

und

$$y_0^T A \leq c^T,\ y_0 \geq 0.$$

Dann gilt wegen $y_0 \geq 0$ auch

$$y_0^T (Ax_0) \geq y_0^T b \tag{1}$$

und wegen $x_0 \geq 0$ auch

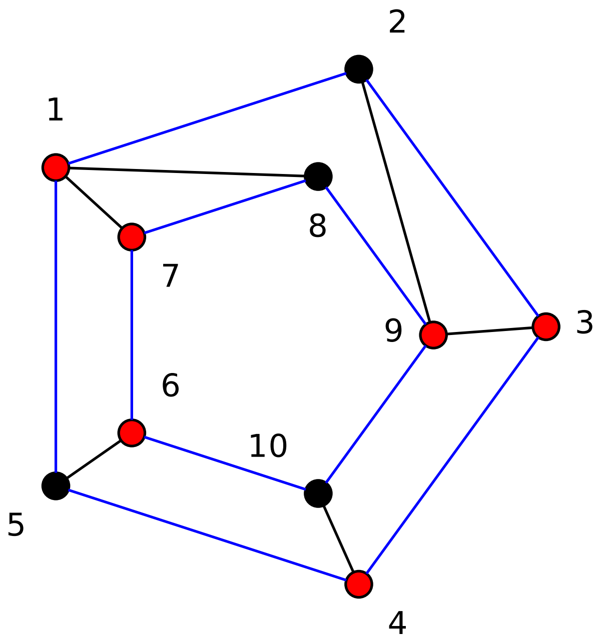
$$(y_0^T A) x_0 \leq c^T x_0. \tag{2}$$

Also zusammen:

$$y_0^T b \overset{(1)}{\leq} y_0^T (Ax_0) = (y_0^T A) x_0 \overset{(2)}{\leq} c^T x_0$$

Starke Dualität hieße, dass die beiden Probleme die gleichen Optimalwerte haben – und daher für einen gegenseitigen Optimalitätsbeweis verwendet werden können.

Zurück zu Matching und Vertex Cover:



Matching:

$$\max\ (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{16} \end{pmatrix}$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$10 \updownarrow \left(\begin{array}{c} a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kante } j \text{ mit Knoten } i \text{ inzident ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ \\ \leftarrow 16 \rightarrow \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{16} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

18. November 2008

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T x \\
\text{unter} & Ax \geq b \text{„primales Problem“} \\
 & x \geq 0
\end{array}
\tag{P}
$$

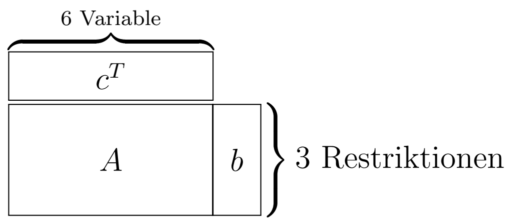
$$
\begin{array}{ll}
\max & y^T b \\
\text{unter} & y^T A \leq c \text{„duales Problem“} \\
 & y \geq 0
\end{array}
\tag{D}
$$

$$
\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccc} & & \\ & A & \\ & & \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow \ \text{Nährstoffe} \\ \leftarrow \ \text{(Restriktionen)} \\ \leftarrow \ \text{(„Nebenbedingungen“)} \end{array} \\
\uparrow \ \uparrow \ \uparrow & \\
\text{Nahrungsmittel} & \\
\text{Variable} & \\
(x_1, \ldots, x_6) &
\end{array}
$$

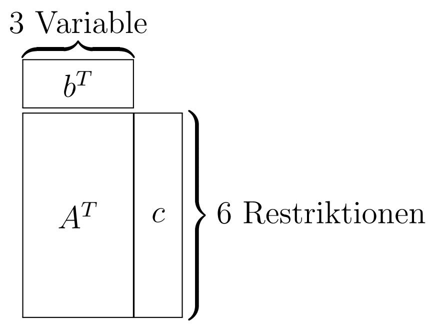
$$
\left(\begin{array}{c} \\ b \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{lc} \leftarrow & \text{Mindestmenge} \\ \leftarrow & \text{an} \\ \leftarrow & \text{Nährstoffen} \end{array}
$$

Außerdem Kostenvektor: $(c_1, \ldots, c_6) \leftarrow$ Nahrungsmittel

Schematisch:



Also:



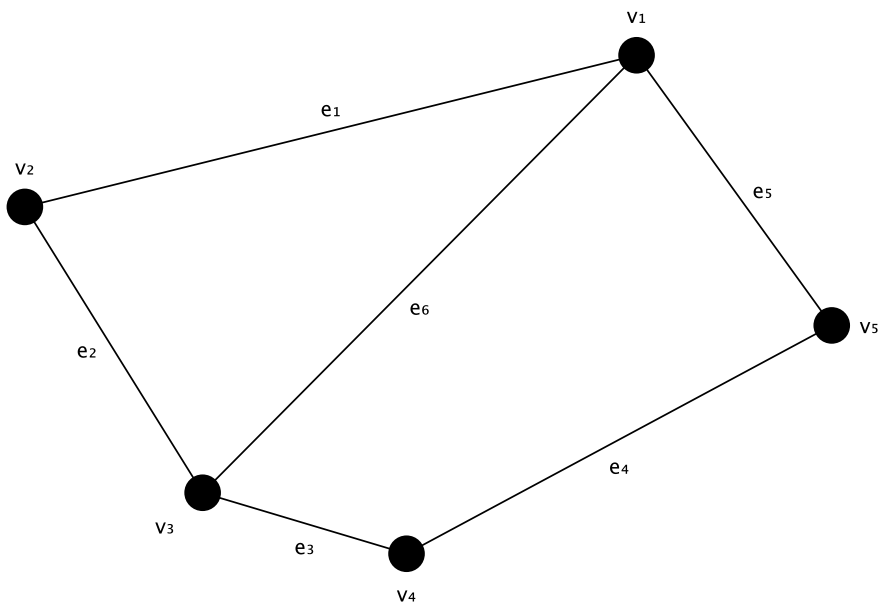
Im dualen Problem:

$$y^T A = (y_1, y_2, y_3)A \leq (c_1, c_2, c_3) = c$$

oder auch

$$A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Dualität zwischen Vertex Cover und Matching:



- 5 Knoten (allgemein n Knoten)
- 6 Kanten (allgemein m Kanten)

Vertex Cover:

- Variable für Knoten (Knoten ja oder nein)
- Restriktionen für Kanten (Kanten müssen überdeckt sein)

Matching:

- Variable für Kanten (Kante ja oder nein)

- Restriktionen für Knoten (Knoten dürfen keine Kante gemeinsam haben)

Vertex Cover:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; v_1 \quad\;\; v_2 \quad\;\; v_3 \quad\;\; v_4 \quad\;\; v_5 \quad\;\; v_6 \\ \min(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \end{array}$$

$$\text{Matrix A} \left\{ \boxed{\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & & & & \\ & x_2 & +x_3 & & & \\ & & x_3 & +x_4 & & \\ & & & x_4 & +x_5 & \\ x_1 & & & & +x_5 & \\ x_1 & & +x_3 & & & \end{array}} \right. \begin{array}{ll} \geq 1 & (e_1) \\ \geq 1 & (e_2) \\ \geq 1 & (e_3) \\ \geq 1 & (e_4) \\ \geq 1 & (e_5) \\ \geq 1 & (e_6) \end{array}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kante } e_i \text{ und Knoten } v_j \text{ inzident,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Allgemeiner:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbb{1}_n^T x \\ \text{unter} & Ax \geq \mathbb{1}_m \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

Matching:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; e_1 \quad\; e_2 \quad\; e_3 \quad\; e_4 \quad\; e_5 \quad\; e_6 \\ \max(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6) \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll} y_1 & & & & +y_5 & +y_6 & \leq 1 & (v_1) \\ y_1 & +y_2 & & & & & \leq 1 & (v_2) \\ & y_2 & +y_3 & & & +y_6 & \leq 1 & (v_3) \\ & & y_3 & +y_4 & & & \leq 1 & (v_4) \\ & & & y_4 & +y_5 & & \leq 1 & (v_6) \end{array}$$

Wieder die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix (diesmal transponiert)!

Allgemeiner:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbb{1}_m^T y \\ \text{unter} & A^T y \leq \mathbb{1}_n \\ & y \in \{0,1\}^m \end{array}$$

2 Lineare Optimierungsprobleme und ihre Lösungen

2.1 Formen linearer Optimierungsprobleme

Welche Formen können lineare Optimierungsprobleme (LP) haben?

Allgemeinste Form:

$$\min \ c^T x + d^T y$$

Ungleichheitsrestriktion:

$$Ax + By \leq a$$

Gleichheitsrestriktion:

$$Cx + Dy = b$$

vorzeichenbeschränkte Variable:

$$x \geq 0$$

unbeschränkte Variable:

$$y \in \mathbb{R}$$

min oder max? Kein Problem: $\min(c^T x + d^T y) \equiv \max(-c^T x - d^T y)$

Genauso mit $\leq$ oder $\geq$:

$$Ax + By \leq a \iff (-A)x - By \geq (-a)$$

Das geht aber auch insgesamt einfacher!

Beispiel 2.1 (Schlupf):

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax \leq a \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

lässt sich äquivalent umformen in

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax + z = a \\ & x, z \geq 0 \end{aligned}$$

(z ist Schlupfvariable)

oder auch

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{c}^T \bar{x} \\ \text{unter} \quad & \bar{A}\bar{x} = \bar{a} \\ & \bar{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2.2:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax \geq a \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax - z = a \\ & x, z \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2.3 (unbeschränkte Variable):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ \text{unter} \quad & Ax + By \leq a \\ & x \geq 0 \\ & y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ersetze y durch $y_+ - y_-$ (mit $y_+, y_- \geq 0$):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y_+ - d^T y_- \\ \text{unter} \quad & Ax + By_+ - By_- \leq a \\ & x, y_+, y_- \geq 0 \end{aligned}$$

mit Schlupfvariablen:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y_+ - d^T y_- \\ \text{unter} \quad & Ax + By_+ - By_- + Iz = a \\ & x, y_+, y_-, z \geq 0 \end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned} \min \widetilde{c}\widetilde{x} &:= \min\ (c^T, d^T, -d^T, 0^T) \begin{pmatrix} x \\ y_+ \\ y_- \\ z \end{pmatrix} \\ \widetilde{A}\widetilde{x} &:= (A, B, -B, I) \begin{pmatrix} x \\ y_+ \\ y_- \\ z \end{pmatrix} = a \\ \widetilde{x} &:= (x, y_+, y_-, z) \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2.4 (Ungleichungen für Gleichungen):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ \text{unter} \quad & Cx + Dy = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ \text{unter} \quad & Cx + Dy \leq b \\ & -Cx - Dy \leq -b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Satz 2.5:
Jedes LP lässt sich durch ein äquivalent lösbares in der sogenannten „Standardform“

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ersetzen.

Beweis:
Betrachte ein allgemeines LP wie am Anfang des Kapitels und ersetze es mit den gezeigten Tricks durch ein äquivalent lösbares System in Standardform. $\square$

2.2 Basislösungen

2008-11-25

Konzentrieren wir uns zunächst einmal auf die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Annahme: Rang$(A) = m$ (voller Zeilenrang)

Also ist auch der Spaltenrang gleich m. Es gibt also m Spalten von A, sodass diese eine reguläre Teilmatrix B von A bilden.

Also hat das System $Bx_B = b$ eine eindeutige Lösung, nämlich $x_B = B^{-1}b$.

Die anderen Variablen brauchen wir nicht und setzen sie für die Gesamtlösung auf Null.
Beispiel 2.6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \mathrm{x}_2 \\ x_3 & \mathrm{x}_4 \\ x_5 & \mathrm{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Reguläre Teilmatrizen sind z.B.:

$$\begin{array}{c} x_1 \;\; x_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{i}$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{ii}$$

$$\begin{array}{cc} x_4 & x_5 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \tag{iii}$$

aber nicht:

$$\begin{array}{cc} x_5 & x_6 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \tag{iv}$$

Zugehörige Lösungen:

(i) $x_1 = 4$, $x_2 = 6$

(ii) $x_1 = 0$, $x_3 = 2$

(iii) selbst, eindeutig!

(iv) Matrix nicht regulär, rechte Seite linear unabhängig von Spalten $\rightarrow$ keine Lösung

Definition 2.7 (Basis):
Eine *Basis* einer $m \times n$-Matrix A mit $\text{Rang}(A) = m$ und $m \leq n$ ist eine reguläre $m \times m$-Teilmatrix B von A – d.h. eine Matrix, die aus m linear unabhängigen Spalten von A besteht. Dann ist die durch

$$x_B = B^{-1}b \qquad (\mathrm{x}_B \in \mathbb{R}^m)$$

$$x_N = 0 \qquad (\mathrm{x}_N \in \mathbb{R}^{n-m})$$

gebildete Lösung des Systems

$$Ax = b$$

eine *Basislösung* des Systems, die zu x_B gehörigen Komponenten des Lösungsvektors sind die *Basisvariablen*. Die anderen Variablen sind die *Nichtbasisvariablen*.

Notation:

(i) Basis $= \{1, 2\}$, Nichtbasis $= \{3, 4, 5, 6\}$, Basislösung $= (4, 6, 0, 0, 0, 0)$

(ii) Basis $= \{1, 3\}$, Nichtbasis $= \{2, 4, 5, 6\}$, Basislösung $= (0, 0, 2, 0, 0, 0)$

In (ii) verschwindet die Basisvariable x_1. (degenerierte Basislösung)

Definition 2.8:
Eine Basislösung heißt *degeneriert*, wenn mindestens eine Basisvariable Null ist.

Eine Basislösung heißt *zulässig*, wenn alle Basisvariablen nicht negativ sind.

2.3 Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Betrachte:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{unter} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{P}
$$

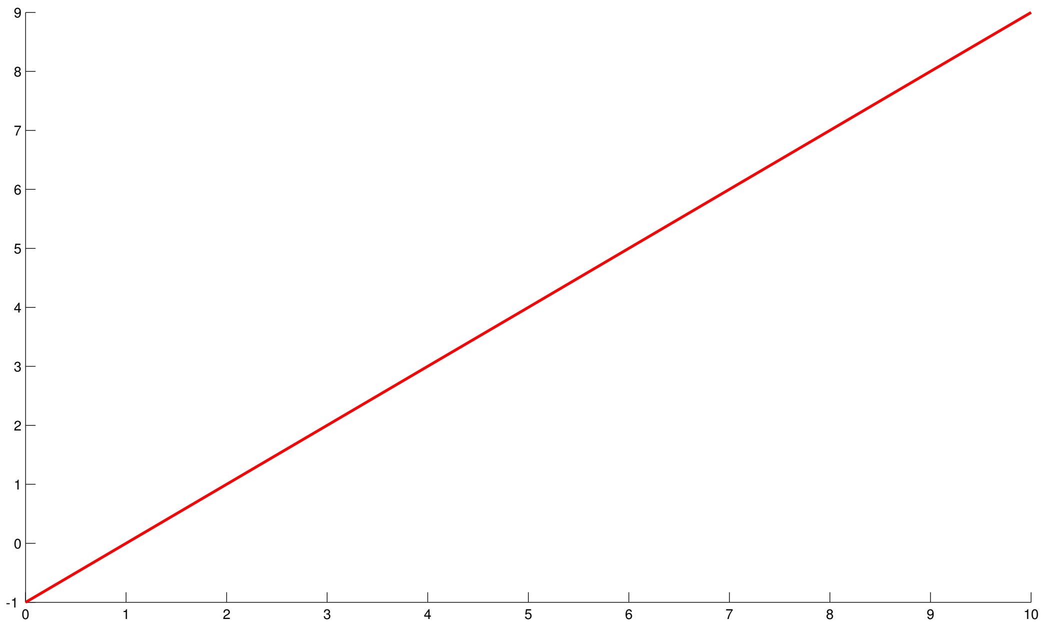
Satz 2.9:

(i) Hat das System (P) eine zulässige Lösung, dann hat es eine zulässige Basislösung.

(ii) Hat das System eine Optimallösung, dann gibt es eine Basislösung, die optimal ist.

Beispiel für ein LP, das eine zulässige Lösung hat (also auch eine zulässige Basislösung), aber keine Optimallösung:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 \qquad (= \max\ x_1) \\
\text{unter} \quad & x_1 - x_2 = 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



$$x_2 = x_1 - 1$$

Das Problem ist zulässig (rote Gerade), aber unbeschränkt, hat also keine Optimallösung.

Basislösungen? Basen:

$$\{1\} \longrightarrow 1 \cdot x_1 = 1, \text{ Basislösung} = (1, 0), \text{ zulässig}$$

und

$$\{2\} \longrightarrow -1 \cdot x_2 = 1, \text{ Basislösung} = (0, -1), \text{ unzulässig}$$

Beweis (zu (i)):
Nennen wir die Spalten von A:

$$a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, \ldots, a_{\bullet n}$$

Jetzt angenommen, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist eine zulässige Lösung, d.h.

$$a_{\bullet 1}x_1 + \ldots + a_{\bullet n}x_n = b \tag{1}$$

Ohne Einschränkung seien $x_1, \ldots, x_p > 0$, $x_{p+1}, \ldots, x_n = 0$ also

$$a_{\bullet 1}x_1 + \ldots + a_{\bullet p}x_p = b \tag{2}$$

Betrachte zwei Fälle:

(I) $a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet p}$ sind linear unabhängig. Dann muss $p \leq m$ sein.

Ist $p = m$, dann sind wir fertig – wir haben eine zulässige Basislösung.

Ist $p < m$, dann kann man wegen $\text{Rang}(A) = m$ $m - p$ Spalten finden, so dass man insgesamt m linear unabhängige Spalten hat. Damit haben wir eine Basis und damit eine degenerierte Basislösung, die zulässig ist.

(II) $a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet p}$ sind linear abhängig.

Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination, die null ergibt

$$y_1 \cdot a_{\bullet 1} + \ldots + y_p \cdot a_{\bullet p} = 0$$

und mindestens ein $y_i \neq 0$.

Annahme: y_i positiv! Mulitpliziert man das mit ε und subtrahiert es von (2), erhält man

$$(x_1 - \varepsilon y_1) \cdot a_{\bullet 1} + \ldots + (x_p - \varepsilon y_p) \cdot a_{\bullet p} = b \tag{3}$$

Das gilt für jedes ε. Wir betrachten also $x - \varepsilon y$. Für $\varepsilon = 0$ ist das die ursprüngliche Lösung.

Idee: ε langsam vergrößern Das verkleinert ($y_i > 0$), vergrößert ($y_i < 0$) den Term $(x_i - \varepsilon y_i)$ – oder lässt ihn unverändert ($y_i = 0$).

Da mindestens ein $y_i > 0$, wird mindestens eine Komponente kleiner.

Wähle ε so groß, dass mindestens eine Komponente verschwindet:

$$\bar{\varepsilon} := \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} : \; y_i > 0 \right\}$$

Damit erhalten wir eine Lösung mit höchstens $p - 1$ nichtverschwindenden Koeffizienten. Das lässt sich wiederholen, bis die Vektoren linear unabhängig sind, d.h. wir eine Basislösung haben.

2. Dezember 2008

Beweis (zu (ii)):
Betrachte $x = (x_1, \ldots, x_n)$ Optimallösung

Fall (I): *(analog zu oben)*

Falls Vektoren zu positiven x_i linear unabhängig sind $\Rightarrow$ x ist Basislösung!

Fall (II):

Auch wie oben, betrachte $(x - \varepsilon y)$:

Unklar ist der Zielfunktionswert!

Für ausreichend kleine ε ist sowohl $x - \varepsilon y$ als auch $x + \varepsilon y$ nichtnegativ.

Zielfunktionswerte:

$$c^T x - \varepsilon c^T y$$
$$c^T x + \varepsilon c^T y$$

Da $c^T x$ optimal ist, muss $c^T y = 0$ sein, d.h. der Zielfunktionswert von $(x - \varepsilon y)$ ist für alle $\varepsilon > 0$ gleich und wir können weiter argumentieren wie oben.

2.4 Extrempunkte

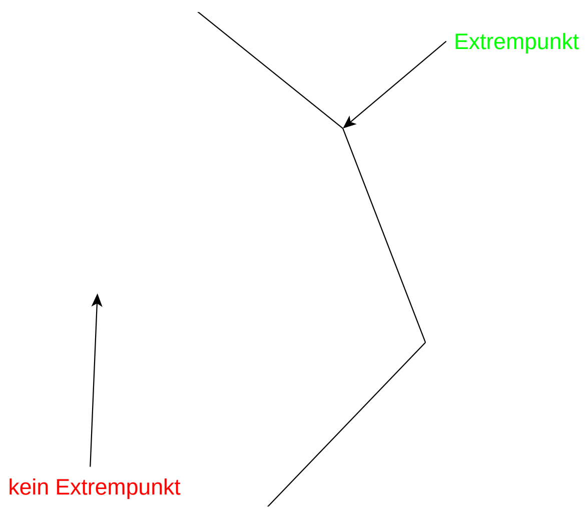
Betrachte $p := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$

Beobachtung 2.10:
Diese Menge ist konvex, d.h.

$$x \in P,\ y \in P \Longrightarrow (\forall \lambda \in [0,1]):\ x + \lambda(y - x) \in P$$

(Schnitt von konvexen Mengen ist konvex!)

Definition 2.11 (Extrempunkt):
Für eine konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $x \in C$ *Extrempunkt*, wenn es keine zwei Punkte $y \neq z \in C$ gibt, mit $x \in]y, z[$, d.h. $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$, $\lambda \in]0, 1[$.



Etwas Geometrie von Ungleichungssystemen:

$$\text{Betrachte } Ax \leq b \begin{array}{ll} \leftarrow & \text{Jede Ungleichung} \\ \leftarrow & \text{schneidet einen} \\ \leftarrow & \text{Halbraum ab!} \end{array}$$

Fußball:

$$\begin{array}{lll} x \in \mathbb{R}^3 & \leftarrow & \text{dreidimensionaler Raum} \\ b \in \mathbb{R}^{32} & \leftarrow & \text{32 Seitenflächen (= Halbräume = Ungleichungen)} \end{array}$$

(Umformung auf Standardform mit Schlupfvariablen, für jede Ungleichung eine eigene zusätzliche Variable!)

Für den Fußball 60 Extrempunkte!

Satz 2.12 (Äquivalenz von Extrempunkten und Basislösungen):
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ von Rang m, $b \in \mathbb{R}^m$

Sei P die konvexe Menge $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist Extrempunkt von P $\iff$ x ist Basislösung.

Beweis:
„$\Leftarrow$“:

Sei x Basislösung, d.h. o.B.d.A. $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ und

$$x_1 a_{\bullet 1} + \ldots + x_m a_{\bullet m} = b \tag{1}$$

mit $a_{\bullet 1}, \dots a_{\bullet m}$ linear unabhängig.

Angenommen x sei Konvexkombination von $y \in P$ und $z \in P$:

$$x = \lambda \cdot y + (1 - \lambda) z, \ 0 < \lambda < 1$$

Da alle Komponenten von x, y, z nichtnegativ sind und λ, $(1 - \lambda)$ nichtnegativ sind, müssen die letzten $n - m$ Komponenten von y und z null sein.

Also ist

$$y_1 \cdot a_{\bullet 1} + \ldots + y_m \cdot a_{\bullet m} = b \tag{2}$$

$$z_1 \cdot a_{\bullet 1} + \ldots + z_m \cdot a_{\bullet m} = b \tag{3}$$

Da $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet m}$ linear unabhängig, muss $x = y = z$ gelten. Also ist x Extrempunkt, da nicht als Konvexkombination von zwei *verschiedenen* Punkten in P darstellbar.

9. Dezember 2008

Beweis:
„$\Rightarrow$“

Sei x Extrempunkt.

Ohne Einschränkung seien die ersten k Komponenten von x positiv. Dann gilt

$$x_1 a_{\bullet 1} + \ldots + x_k a_{\bullet k} = b$$

Angenommen, $a_{\bullet 1},\ldots,a_{\bullet k}$ wären linear abhängig.

Dann gäbe es eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors:

$$y_1 a_{\bullet 1} + \ldots + y_k a_{\bullet k} = 0$$

Setze $y = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$.

Da $x_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, kann man ein ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ wählen, sodass

$$x + \varepsilon y \geq 0$$
$$x - \varepsilon y \geq 0$$

Außerdem ist

$$A(x + \varepsilon y) = Ax + \varepsilon Ay = Ax = b$$
$$A(x - \varepsilon y) = Ax - \varepsilon Ay = Ax = b$$

Dann wäre aber

$$x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(x - \varepsilon y)$$
$$\left(= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\varepsilon y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\varepsilon y\right)$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass x Extrempunkt ist, also müssen $a_{\bullet 1},\ldots,a_{\bullet k}$ linear unabhängig sein – d.h. x ist Basislösung. □

Überlegung: Lösen von LPs durch Betrachtung von Basislösungen!

(1) betrachte alle Basen
(2) löse das zugehörige Gleichungssystem
(3) suche die beste Lösung aus
(4) lass dir etwas einfallen, um unbeschränkte Probleme erkennen zu können

Für den Fußball:

Zahl der Basislösungen:

$$\binom{32}{2} = 32 \cdot 31 \cdot 5 = 992 \cdot 5 \approx 5000$$

Lösen eines $n \times n$-Gleichungssystems dauert $\Theta(n^3)$ ($\Theta(n^2)$ Nullen, die erzeugt werden müssen, $\Theta(n)$ Additionen, die pro Null gemacht werden müssen)

$$\longrightarrow 32^3 \cdot \binom{32}{2} \approx 32\,000 \cdot 5\,000 = 160\,000\,000$$

Ideen und Wünsche zum Sparen von Arbeit:

(1) Betrachte nicht *alle* Basislösungen, sondern nur die *zulässigen.* (WIE?!)

$$(\approx 2\,000\,000)$$

(2) Da es gilt, *viele* Gleichungssysteme zu lösen, kann man Arbeit recyclen, wenn man nicht eine komplett neue Basis betrachtet, sondern immer nur eine Spalte austauscht.

Damit braucht man pro Lösung nur noch $O(n^2)$ statt $O(n^3)$.

$$(\approx 60\,000)$$

(3) Betrachte nur *„Nachbarlösungen"* zur jeweils aktuellen Basislösung, die einen besseren Funktionswert liefern. (WIE?!)

$$(\approx 10\,000)$$

(4) WIE?! $\rightarrow$ Geeignet bei (3) mit dabei!

2.5 Vorbetrachtungen zum Simplex-Algorithmus

Wie bereits erwähnt, können wir uns bei der Suche nach dem Optimum einer Aufgabe

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{unter} & Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{array}$$

auf die Basislösungen beschränken.

Sei $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ eine zulässige Basislösung, wobei $x_1 \dots, x_m > 0$ seien. (nicht degeneriert)

Statt alle Basislösungen durchzuprobieren, können wir versuchen, von der aktuellen zulässigen Lösung zu einer anderen zu kommen.

Dazu muss einer der Vektoren $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet m}$ aus der Basis entfernt werden und ein neuer zusätzlich hineinkommen – sagen wir $a_{\bullet q}$, $q > m$.

Da $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet m}$ eine Basis bilden, gibt es eine Darstellung

$$a_{\bullet q} = y_1 a_{\bullet 1} + \dots + y_m a_{\bullet m}$$

Mit $\varepsilon > 0$ erhält man

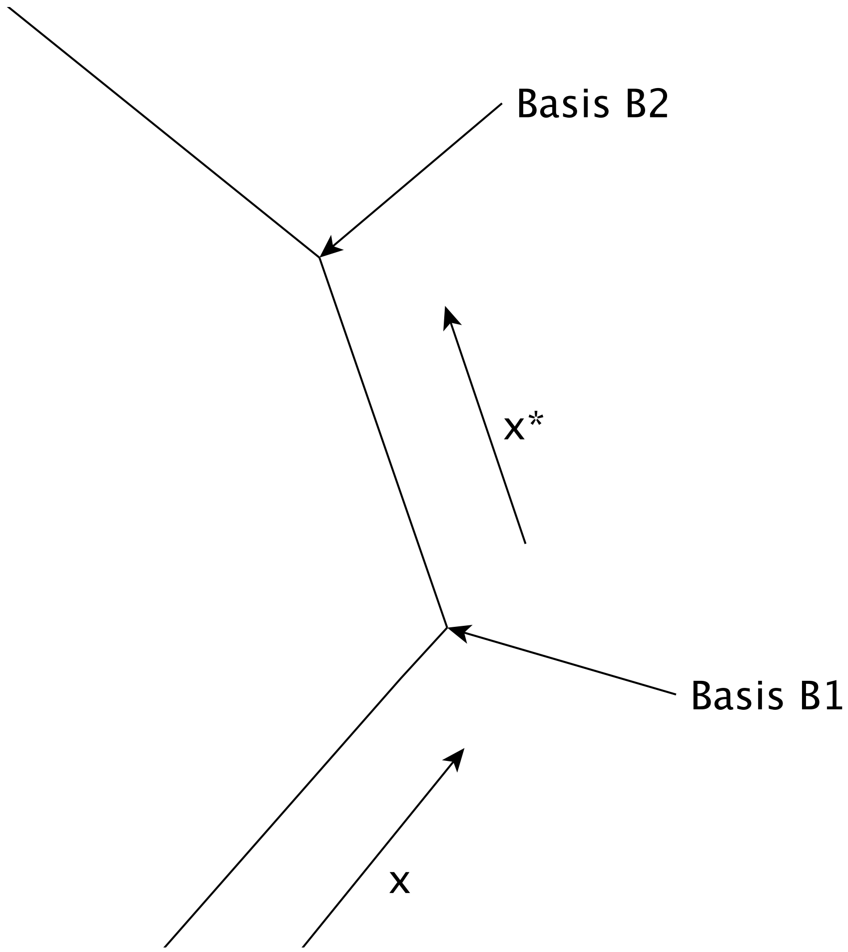
$$(x_1 - \varepsilon y_1) a_{\bullet 1} + \dots + (x_m - \varepsilon y_m) a_{\bullet m} + \varepsilon a_{\bullet q} = b \tag{*}$$

Für jedes $\varepsilon \geq 0$ erhält man eine Darstellung von b aus höchstens $m + 1$ Vektoren, für $\varepsilon = 0$ die ursprüngliche. Ist ε klein genug, so liefert (*) eine zulässige Lösung, aber keine Basislösung. Mit wachsendem ε steigen oder fallen die Koeffizienten $(x_i - \varepsilon y_i)$.

Falls wenigstens einer fällt (also ein $y_i > 0$ ist), kann man ε so wählen, dass gerade der erste (oder die ersten) verschwinden, also

$$\varepsilon := \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{x_i}{y_i} : y_i > 0 \right\}$$

Das liefert eine neue Basislösung mit dem neuen Basisvektor $a_{\bullet q}$.



$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \\
x^* &= (x_1 - \varepsilon y_1, \ldots, x_m - \varepsilon y_m, 0, \ldots, 0, \varepsilon, 0, \ldots, 0) \\
&= x + \varepsilon x' = x + \varepsilon(-y_1, \ldots, -y_m, \ldots, 1, \ldots) \\
\text{Basis B1} &= \{1, \ldots, m\} \\
\text{Basis B2} &= \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\} \cup \{q\}
\end{aligned}
$$

Man läuft also von Extrempunkt zu Extrempunkt!

Wie wird man dabei besser?

3 Simplex-Algorithmus

16. Dezember 2008

- zulässige Basis → zulässige Basislösung
- Zielfunktion verbessert sich → zum Schluss wird Optimalwert erreicht

3.1 Pivotelemente

Wir betrachten Umformungen des Gleichungssystems

$$Ax = b. \tag{GS}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, $\mathrm{Rang}(A) = m$.

Durch elementare Umformungen, kann man nun folgende Form des Gleichungssystems erhalten:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 \qquad\qquad + y_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + y_{1,n}x_n &= y_{1,0} \\ x_2 \qquad + y_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + y_{2,n}x_n &= y_{2,0} \\ \vdots & \\ x_m + y_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + y_{m,n}x_n &= y_{m,0} \end{array}\right\} \tag{*}$$

Allgemeiner soll ein System in kanonischer Form sein, wenn es durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen in die Form $(*)$ übergeführt werden kann.

$x_1,\ldots,x_m$ sind Basisvariablen, $x_{m+1},\ldots,x_n$ sind Nichtbasisvariablen.

Man schreibt das System $(*)$ wie gehabt als Tableau:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & y_{1,0} \\ & 1 & 0 & & y_{2,m+1} & \cdots & y_{2,n} & y_{2,0} \\ & 0 & \ddots & & & \vdots & & \\ & & & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & y_{m,0} \end{array}$$

Nun soll eine Basisvariable zu einer Nichtbasisvariablen werden. Konkret:

x_p, $1 \le p \le m \longrightarrow$ raus

x_q, $m+1 \le q \le n \longrightarrow$ rein

Das geht, wenn $x_{pq} \neq 0$ ist. Dann erhält man durch elementare Umformungen (wie Gaußalgorithmus):

$$\begin{array}{ccc} y_{ij} & \cdots & y_{iq} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{pj} & \cdots & y_{pq} \end{array}$$

$$\begin{aligned} y_{iq}^{(neu)} &= y_{iq} - \frac{y_{pq}}{y_{pq}} \cdot y_{iq} = 0 \\ y_{pj}^{(neu)} &= \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \\ y_{ij}^{(neu)} &= y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \cdot y_{iq} = 0 \ (\forall\ i \neq p) \end{aligned}$$

Das Element y_{pq} heißt *Pivotelement.*

Beispiel 3.1:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
z_1 :	1	0	0	1	1	−1	5	$\vert : 1$
z_2 :	0	1	0	2	−3	1	3	
z_3 :	0	0	1	−1	2	−1	−1	

$$x_1 \leftrightarrow x_4$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z_1 :	1	0	1	1	1	−1	5
$z_2 - 2z_1$:	−2	1	0	−5	3	1	−7
$z_3 - (-1)z_1$:	1	0	0	3	−2	−1	4

3.2 Zulässigkeit bei Basiswechsel

Die Bedingung für die Zulässigkeit ist

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x_i}{y_{iq}} : y_i > 0\right\}$$

Man erhält also die Basisvariable p, für die $\dfrac{x_p}{y_{pq}}$ minimal ist.

Beispiel 3.2:

$$
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & \uparrow & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
x_i/y_{iq} \\
\hline
4/2 = 2 \;\leftarrow \\
3/1 = 3 \\
\text{—}
\end{array}
$$

Neues Tableau:

$$
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
1/2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
-1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1/2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Geometrische Interpretationen:

(1)
- Konvexe Menge aller zulässigen x
- Basislösungen sind Extrempunkte
- Laufen entlang der Kanten zur nächsten Basis

(2) Darstellung im Raum der Spalten von A und b

$$a_{\bullet 1}x_1 + \ldots + a_{\bullet n}x_n = b$$

$$x_i \geq 0 \; (i = 1, \ldots, n)$$

Angenommen:

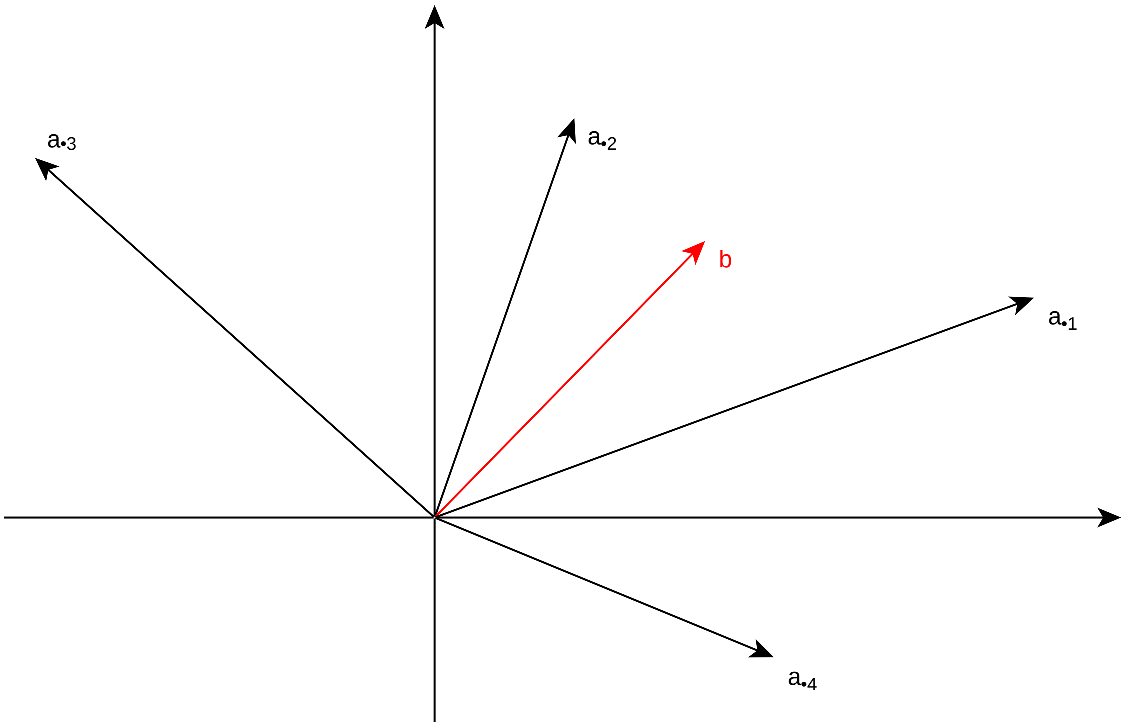
$$b = x_1 a_{\bullet 1} + x_2 a_{\bullet 2}$$

Zulässiger Basiswechsel:

$$a_{\bullet 3} \leftrightarrow a_{\bullet 2}$$

Nicht zulässiger Basiswechsel:

$$a_{\bullet 2} \leftrightarrow a_{\bullet 4}$$



3.3 Bestimmung einer minimalen zulässigen Lösung

Ziel: Wie ändert sich die Zielfunktion, wenn wir eine Nichtbasisvariable auf einen positiven Wert setzen?

$$
\begin{aligned}
z_0 = c_B^T x_B = c^T x &= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} c_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(y_{i,0} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij} x_j \right) + \sum_{i=m+1}^{n} c_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i y_{i,0} - \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij} x_j + \sum_{i=m+1}^{n} x_i c_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} c_i y_{ij} x_j = \sum_{j=m+1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_i y_{ij} x_j}_{z_j} \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i y_{i,0} - \sum_{j=m+1}^{n} x_j z_j + \sum_{i=m+1}^{n} x_i c_i \\
&= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) \cdot x_j
\end{aligned}
$$

Also, ist $(c_j - z_j)$ negativ für ein j, so wird die Zielfunktion kleiner, wenn man x_j in die Basis aufnimmt.

Satz 3.3 (Verbesserung der zulässigen Basislösung):
Gegeben sei eine nicht degenerierte zulässige Basislösung mit Zielfunktionswert z_0 für ein j ist $(c_j - z_j) \leq 0$.

Falls $a_{\bullet j}$ gegen einen Vektor in der Basis getauscht werden kann, erhält man eine neue zulässige Basislösung mit $z < z_0$.

Kann man dieses nicht, so ist die zulässige Menge K unbeschränkt und die Zielfunktion kann beliebig klein werden.

Satz 3.4:
Falls für eine zulässige Basislösung $(c_j - z_j) \geq 0$ für alle j, dann ist die Basislösung optimal.

Beispiel 3.5:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r|l}
 & & & & & & & & x_i/y_{iq} \\
1/4 & -8 & -1 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0/\tfrac{1}{4} = 0 \leftarrow \\
1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0/\tfrac{1}{2} = 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
-3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r|}
1 & -32 & -4 & -36 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 3/2 & -15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
0 & -4 & -7/2 & 33 & 3 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

6. Januar 2008

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{unter} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Tableau:

$$
\begin{array}{|c|c|c}
\hline
c^T & 0 & \\
\hline
A & I & \multicolumn{1}{c|}{b} \\
\hline
\end{array}
$$

Wenn n Schlupfvariable *und* b nicht-negativ, dann bekommen wir so eine zulässige Startlösung. Wie bekommt man sonst eine zulässige Startlösung? Das kann ein großes Problem sein!

Beispiel 3.6:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{unter} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0 \\
& c^T x \leq \beta
\end{aligned}
$$

Wobei β der geratene Zielfunktionswert ist.

Also: Zulässigkeit kann ein echtes Problem sein!

Idee: Führe künstliche Hilfvariable ein!

Aus

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{II}$$

mache (o.B.d.A. $b \geq 0$)

$$\begin{aligned} Ax + Iy &= b \\ x, y &\geq 0 \end{aligned} \tag{I}$$

Beobachtung 3.7:
(II) hat eine zulässige Lösung $\iff$ (I) hat eine zulässige Lösung mit $y = 0$

Betrachte daher

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbb{1}^T y \\ \text{unter} & Ax + Iy = b \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Also:

Satz 3.8:
Das Problem

$$\begin{array}{ll} \text{unter} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

hat genau dann eine zulässige Lösung, wenn das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbb{1}^T y \\ \text{unter} & Ax + Iy = b \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

den Optimalwert 0 hat.

Zusammen *2-Phasen-Methode*:

- Führe Hilfsvariable ein
- Löse Hilfsproblem Falls Wert ¿ 0:
  - Ursprüngliches Problem unzulässig
  - Stop

Falls Wert = 0:

- Basislösung für ursprüngliches Problem
- Weiter lösen

„Reduzierte Kosten“ Pivotschritt:

B	D	b
c_B^T	c_D^T	0

(mit Basis B, Nichtbasis D und Kosten c_B, c_D)

Umgeformt:

I	$B^{-1}D$	$B^{-1}b$
0	$c_D^T - c_B^T B^{-1} D$	$-c_B^T B^{-1} b = -c_B^T x_B$

$$\text{Reduzierte Kosten} = c_D^T - c_B^T B^{-1} D$$

Erhält man durch Eliminationsschritt im Tableau

13. Januar 2008

Gegeben:

- 70 Personen i
- 70 Personen j

Nutzen: v_{ij}, wenn eine Person i der Aufgabe j zugeteilt wird.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{70} \sum_{j=1}^{70} v_{ij} x_{ij} \\ \text{unter} \quad \forall i: \quad & \sum_{j=1}^{70} x_{ij} = 1 \\ \forall j: \quad & \sum_{i=1}^{70} x_{ij} = 1 \end{aligned}$$

70! verschiedene Möglichkeiten $\approx 10^{100}$

4 Optimalität und Dualität

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax \leq b \end{array} \tag{P}$$

dual dazu:

$$\begin{array}{ll} \min & y^T b \\ \text{unter} & y^T A = c \\ & y \geq 0 \end{array} \tag{D}$$

(Schwache) Dualität Wenn x und y zulässig für (P) und (D) sind, dann gilt

$$c^T x \leq y^T b,$$

d.h. die Zielfunktionswerte beschränken sich gegenseitig.

Wann gilt Gleichheit?

$$\begin{aligned} & & c^T x &= y^T b \\ &\overset{y^T A = c}{\iff} & y^T A x &= y^T b \\ &\iff & y^T (Ax - b) &= 0 \\ &\iff & \sum_{j=1}^{m} \underbrace{y_j}_{\geq 0} \underbrace{(Ax - b)_j}_{\geq 0} &= 0 \end{aligned}$$

Da alle $y_j(Ax - b)_j$ nicht positiv sind, müssen alle für sich verschwinden. Also

$$c^T x = y^T b \iff \underbrace{(Ax)_j < b_j \Rightarrow y_j = 0 \text{und} y_j > 0 \Rightarrow (Ax)_j = b_j}_{\text{komplementärer Schlupf}}$$

Satz 4.1 (Komplementärer Schlupf):
Seien x und y zwei zulässige Lösungen für (P) und (D). Dann gilt

$$c^T x = y^T b \iff \text{Komplementäre Schlupfbedingungen sind erfüllt, d.h}$$
$$(Ax)_j < b_j \Rightarrow y_j = 0$$
$$y_j > 0 \Rightarrow (Ax)_j = b_j$$

Insbesondere sind x und y optimal, wenn sie die Bedingungen erfüllen.

Komplementärer Schlupf erlaubt den Beweis von Optimalität:

Gegeben ein x, vielleicht optimal, suche passendes y!

$$(Ax)_j < b \Rightarrow y_i = 0$$

liefert einige Nullen.

Dazu kommt $y^T A = c$-Gleichungssystem.

Betrachte jetzt

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P'}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ \text{unter} \quad & y^T A \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{D'}$$

Satz 4.2 (Starke Dualität):
Wenn (P') eine optimale Lösung x_* hat, dann hat (D') eine optimale Lösung y_* mit

$$c^T x_* = (y_*)^T b.$$

20. Januar 2008

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ \text{unter} \quad & y^T A \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{D}$$

Beweis (Satz ?? – Starke Dualität):
Sei x_* eine optimale Lösung von (P); wir zeigen, dass es eine zulässige Lösung y_* von (D) gibt, mit

$$c^T x_* = b^T y_*.$$

Betrachte Schlupfvariable zu den Restriktionen des primalen Problems, also

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Betrachtet man nun das optimale Tableau für (P), hat man

$$z = z_* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c_k} x_k$$

Hier ist jedes $\bar{c_k}$ eine nicht-positive Zahl ($\bar{c_k} = 0$ für Basisvariable). Außerdem ist z_* Optimalwert, also

$$z_* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{*}$$

Betrachte jetzt

$$(y_*)_i := -\bar{c_{n+i}}$$

Wir behaupten, dass dies eine zulässige Lösung für (D) liefert mit

$$c^T x_* = b^T y_*$$

Offenbar gilt wegen $\bar{c} \leq 0$ auch $y_* \geq 0$. Weiterhin bekommen wir durch Einsetzen in (*):

$$
\begin{aligned}
z &= z_* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c_k} x_k \\
\iff \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z_* + \sum_{k=1}^{n} \bar{c_k} x_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{c_k} x_k \\
\iff \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z_* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c_j} x_j + \sum_{i=1}^{m} (-y_*)_i x_{n+i} \\
\iff \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z_* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c_j} x_j - \sum_{i=1}^{m} (y_*)_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)
\end{aligned}
$$

umgeformt:

$$
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(z_* - \sum_{i=1}^{m} b_i (y_*)_i \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{c_j} + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} (y_*)_i \right) x_j
$$

Das muss für alle $x_1, \dots, x_m$ gelten, wir haben also eine Aussage

$$
\begin{aligned}
c^T x &= w + d^T x, \text{ d.h.} \\
c_j x_j &= w_j + d_j x_j, \text{ für alle } j, \text{ also auch } x_j = 0
\end{aligned}
$$

Also ist $w = 0$ bzw.

$$
z_* = \sum_{i=1}^{m} b_i (y_*)_i
$$

und $c = d$, d.h. $c = \bar{c} + A^T y_*$

Dann ist $b^T y_* = z_* = c^T x_*$ und (da $\bar{c}$ nicht-positiv) auch $c \geq A^T y_*$ Damit ist y_* zulässig und optimal. $\square$

$$
\begin{aligned}
\min \ & \frac{1}{x} \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- zulässig
- beschränkt
- ohne Optimum

Bei LPs anders! Noch einmal:

Satz 4.3:
Ein LP ist entweder:

(i) unzulässig
(ii) unbeschränkt
(iii) optimal lösbar

(Konsequenz aus Simplex)

5 Lösen kombinatorischer Optimierungsprobleme mit Linearer Optimierung

27. Januar 2009

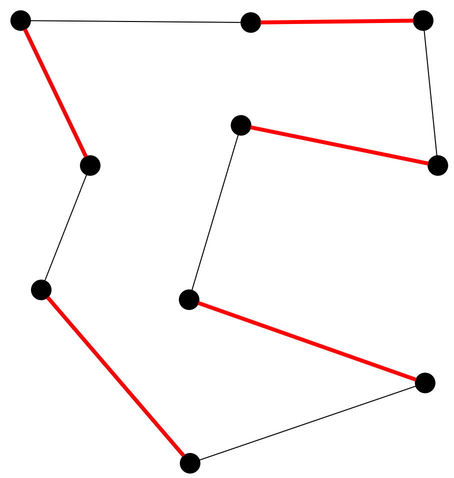
5.1 Beispielprobleme

Gegeben: Gewichteter Graph $G = \{V, E\}$, $\mathrm{c} : E \to \mathbb{R}$

Gesucht: Ein perfektes Matching $M \subseteq E$ minimalen Gesamtgewichts $\sum\limits_{e \in M} \mathrm{c}(e)$

Bemerkung: Es reicht für alle praktischen Zwecke, G als vollständig anzunehmen; unerwünschte (oder nicht vorhandene) Kanten macht man einfach extrem teuer.

Geometrisches Beispiel: $G = K_{10}$, Kantengewichte entsprechen (euklidischen) Punktdistanzen



Anderes Beispiel:

Gegeben: Graph $G = \{V, E\}$, Knotenkosten $\mathrm{b} : V \to \mathbb{R}$

Gesucht: Vertex Cover $S \subseteq V$, das heißt Kanten überdeckende Knotenmenge mit minimalem Gesamtgewicht: $\min \sum\limits_{v \in S} \mathrm{b}(v)$

Noch ein Beispiel:

Gegeben: (vollständiger) Graph $G = \{V, E\}$ mit Kantengewichten $\mathrm{c} : E \to \mathbb{R}$

Gesucht kürzeste Rundreise, das heißt ein Hamiltonkreis C in G, für den $\sum\limits_{e \in C} \mathrm{c}(e)$ minimal ist.

5.2 Formulierung als ganzzahlige lineare Programme (ILP)

Gewichtsminimale perfektes Matching:

$$\min \sum_{e \in E} x_e c_e$$

$$\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1 \qquad (\forall\ v \in V)$$

$$x_e = \begin{cases} 1, \text{ für } e \in M \\ 0, \text{ für } e \notin M \end{cases}$$

Vertex Cover:

$$\min \sum_{v\in V} y_v b_v$$

$$\sum_{e\in\delta(v)} y_v \geq 1 \qquad (\forall\ e = (v,w) \in E) \rightsquigarrow y_v + y_w \geq 1$$

$$y_v = \begin{cases} 1, \text{ für } v \in S \\ 0, \text{ für } v \notin S \end{cases}$$

TSP:

$$\min \sum_{e\in E} x_e c_e$$

$$\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 2 \qquad (\forall\ v \in V)$$

$$x_e = \begin{cases} 1, \text{ für } e \in C \\ 0, \text{ für } e \notin C \end{cases}$$

Problem: Auch ganzzahlige Lösungen müssen nicht unbedingt Touren beschreiben, sondern können aus mehreren disjunkten Kreisen bestehen.

Idee zur Reparatur: Zusätzliche Bedingungen einfügen:

$$(\forall\ \emptyset \neq S \subsetneq V) : \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2$$

Beobachtung: Jetzt entsprechen die ganzzahligen Lösungen genau dem Hamiltonkreis.

Argumentation: Betrachte eine zusammenhängende Kantenmenge, die jeden Knoten zweimal enthält. Betrachte einen beliebigen Knoten v_0. Laufe von v_0 entlang einer seiner beiden Kanten los

$$v_0 \to v_1 \stackrel{2.Kante}{\to} v_2 \to \dots$$

Da wir nur endlich viele Kanten haben, muss das nach endlich vielen Schritten zu einem Knoten kommen, der bereits besucht wurde; das kann nur v_0 sein. Wenn wir jetzt noch nicht alle Knoten besucht hätten, gäbe es Kanten, die nicht mit den benutzten Kanten verbunden wären, im Widerspruch zur Annahme. Also haben wir einen Hamiltonkreis.

5.2.1 Lösen der LP-Relaxierungen

Relaxierung der Ganzzahligkeit:

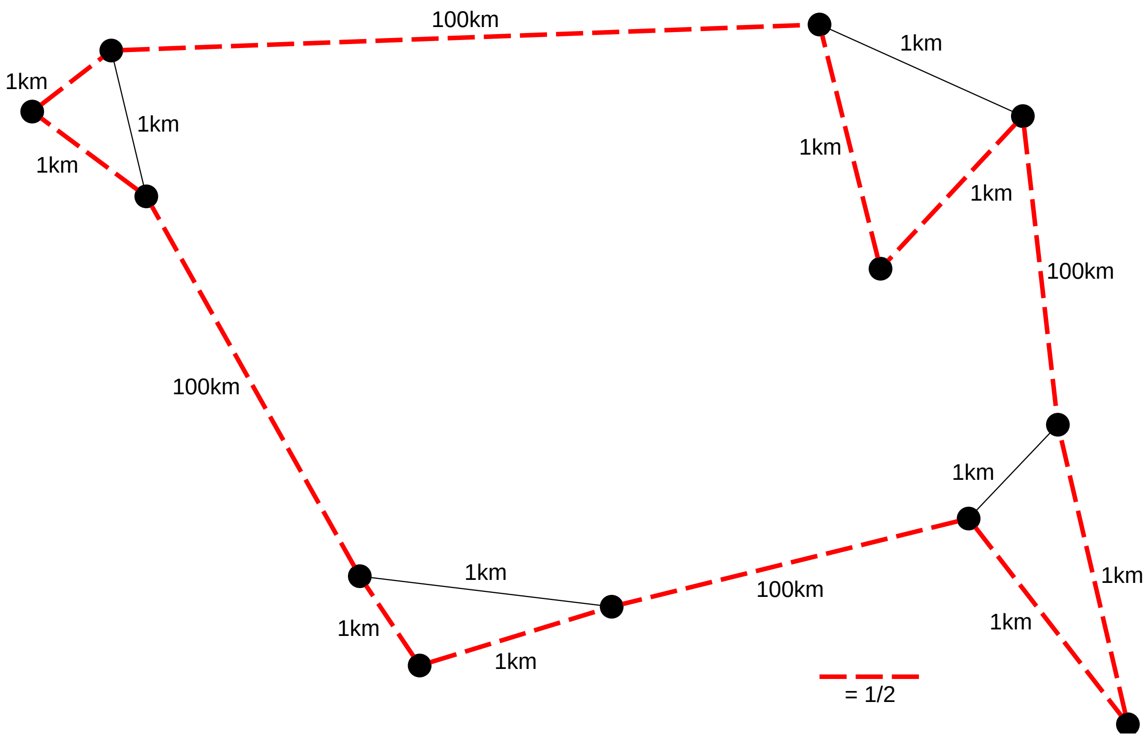
Matching:

$$\min \sum_{e \in E} x_e c_e$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \qquad (\forall\ v \in V)$$

$$x_e \geq 0 \leftarrow \text{Relaxierung von} x_e \in \{0, 1\}$$

($x_e \leq 1$ wird automatisch erfüllt)



Problem: Fraktionale Lösung!

Unter Umständen weichen also LP- und ILP-Lösungen erheblich von einander ab.

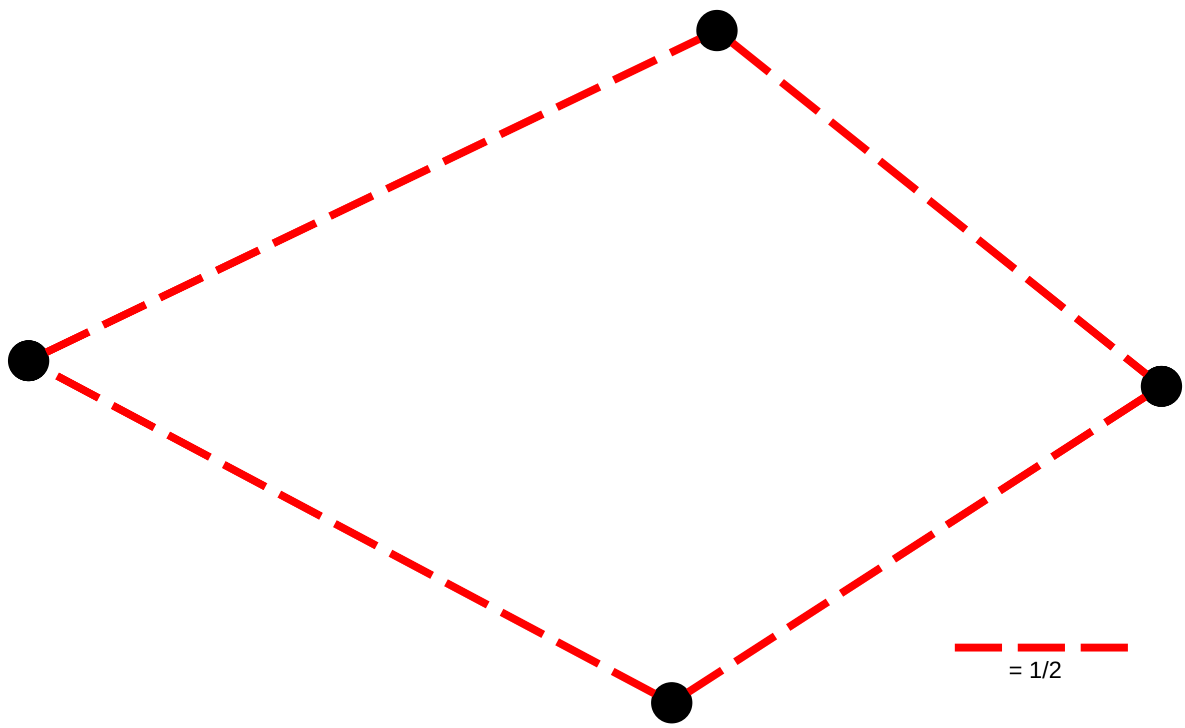
Beobachtung: Für jede ungerade Knotenmenge muss es mindestens einen Knoten geben, der einen Partner außerhalb der Teilmenge hat. Das ergibt folgende Zusatzbedingungen:

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \qquad (\forall\ S \subsetneq V,\ |S| \text{ ungerade})$$

Das sind die sogenannten „Blossom-Contraints“ (Jack Edmonds).

Frage: Wie sehen nach Einfügen der Blossom-Contraints die Basislösungen aus?

Beobachtung: Die rote Lösung ist keine Basislösung!



3. Februar 2009

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph, also $V = A \dot\cup B$, so dass innerhalb von A und B keine Kanten verlaufen. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass G keine ungeraden Kreise enthält.

Wir wollen das kostenminimale perfekte Matching Problem lösen:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{e \in E} x_e \cdot c_e, & c_e = \text{ Kantengewicht auf Kante } e \\ \text{unter} & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & \forall\, v \in V \\ & x_e \in [0, 1] & \\ & c_e \geq 0 & \end{array}$$

Betrachte optimale Basislösung $\bar{x}$

Beobachtung 5.1:

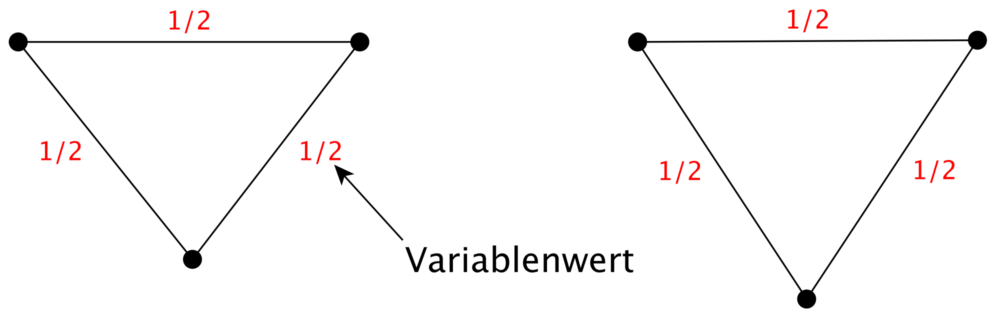
$$\bar{x} \text{ ganzzahlig} \iff \bar{x} \text{ codiert perfektes Matching}$$

Frage: Kann $\bar{x}$ fraktional sein, d.h. Einträge aus $]0,1[$ haben?

Betrachte den Trägergraphen:

$$G_{\bar{x}} = (V, E'), \qquad\qquad E = \{e | x_e > 0\}$$

Beispiel 5.2:



Beobachtung 5.3:
Sei $C = (e_1, e_2, \dots, e_{2k})$ ein Kreis in $G_{\bar{x}}$.

(1) C muss gerade sein

(2) Kein Variablenwert kann in diesem Kreis 1 sein (sonst kein Kreis).

Beobachtung 5.4:
In einer optimalen Basislösung kann kein Kreis auftauchen.

Begründung:

Basislösung $\iff$ Extrempunkt des zulässigen Bereichs
(Extrempunkt = ein Punkt, der zwischen
keinen zwei anderen Punkten des zulässigen Bereichs liegt.

Betrachte $\varepsilon := \min_{i=1,\ldots,2k}\{\bar{x}_{e_i}, 1-\bar{x}_{e_i}\}$ und definiere $\bar{x}^+$ mit

$$\bar{x}_e^+ := \begin{cases} x_e & \text{für } e \notin C \\ \bar{x}_e + \varepsilon & \text{für } e \in \{e_1, e_3, \ldots, e_{2k-1}\} \\ \bar{x}_e - \varepsilon & \text{für } e \in \{e_2, e_4, \ldots, e_{2k}\} \end{cases}$$

Man sieht $\bar{x}^+$ ist eine zulässige Lösung.

Genau so definieren wir

$$\bar{x}_e^- := \begin{cases} x_e & \text{für } e \notin C \\ \bar{x}_e - \varepsilon & \text{für } e \in \{e_1, e_3, \ldots, e_{2k-1}\} \\ \bar{x}_e + \varepsilon & \text{für } e \in \{e_2, e_4, \ldots, e_{2k}\} \end{cases}$$

$\bar{x}_e{}^-$ ist natürlich auch zulässig für das LP.

Jetzt sieht man:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x}^+ + \bar{x}^-)$$

D.h. $\bar{x}$ ist kein Extrempunkt und damit auch keine Basislösung.

Also enthält $G_{\bar{x}}$ keine Kreise.

Beobachtung 5.5:
$G_{\bar{x}}$ kann keine Pfade länger als 1 enthalten.

Begründung: Betrachte Knoten von Grad 1 in $G_{\bar{x}}$. Von diesem Knoten gibt es einen Pfad zu einem anderen Knoten von Grad 1.

An einem Knoten von Grad 1 muss die (einzige) Variable den Wert 1 haben. Sei $e = \{v, w\}$, v das Blatt, dann gibt es keine zu w inzidente Kante $f \neq e$ mit positivem Variablenwert. $\Rightarrow$ Alle Pfade haben die Länge 1.

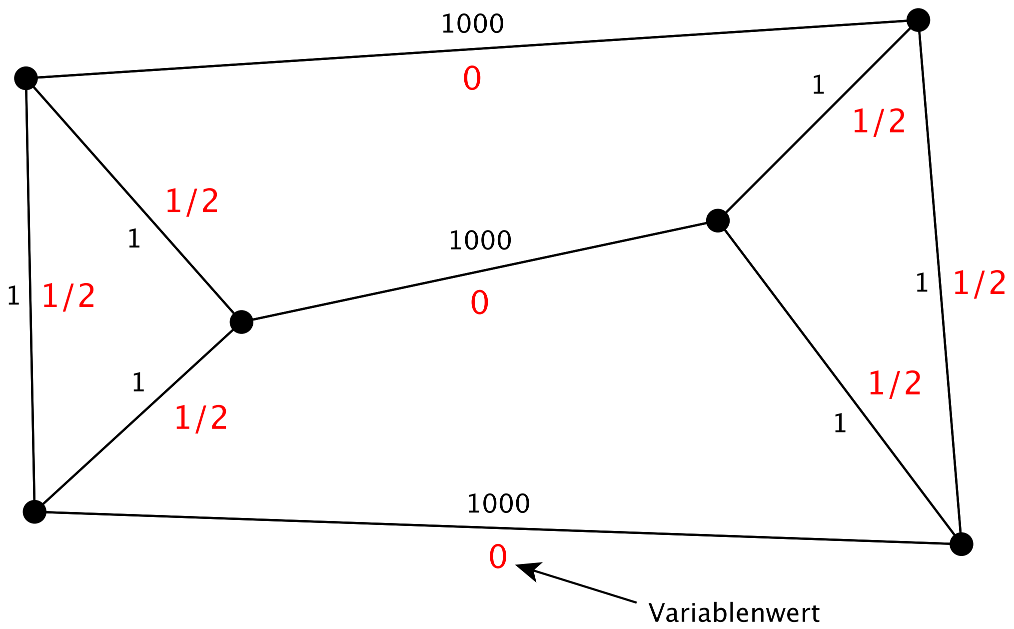
Satz 5.6:
Das Polytop

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$
$$v \in V$$
$$x_e \in [0,1]$$

hat für bipartite Graphen nur ganzzahlige Extrempunkte.

Was passiert in allgemeinen Graphen?

Beispiel 5.7:



Blossom Constraint:

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\delta(S)} x_e &\geq 1 \\ S &\subseteq V \\ S &\text{ ungerade} \\ 1 \leq |S| &\leq |V|-1 \end{aligned}$$

Herleitung:

(1) Graphentheoretisch

(2) Algebraisch

x sei ein perfektes Matching. Betrachte ungerade Menge S. Dann ist

$$\sum_{v\in S}\sum_{e\in\delta(v)} x_e = |S|$$

Für die Kanten

$$e \in E(S) = \{e = \{v,w\} | v,w \in S\}$$

innerhalb von S gilt:

$$\sum_{v\in V}\sum_{e\in\delta(v)\wedge e\in E(S)} x_e \leq |S|$$

Jede Kante $e \in E(S)$ wird genau zweimal betrachtet, also:

$$\underbrace{\sum_{e\in E(S)}}_{\text{ganzzahlig}} \leq \underbrace{\frac{|S|}{2}}_{\text{nicht ganzzahlig}}$$

Also können wir die rechte Seite abrunden ohne ganzzahlige Lösungen auszuschließen.

Damit:

$$\sum_{e\in E(S)} x_e \leq \left\lfloor \frac{|S|}{2} \right\rfloor = \frac{|S|-1}{2}$$

$$\text{(Das ist äquivalent zu } \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 1\text{)}$$

Also haben wir die gleiche Bedingung algebraisch hergeleitet.

10. Februar 2009

Gegeben: Eine Menge von Punkten in der Ebene

Gesucht: Für jeden Punkt P_i ein Radius r_i, sodass

(1) Der entsprechende Schnittgraph der Kreise geeignet zusammenhängend ist.

(2) Die Gesamtkosten der Kreise klein sind.

   (a)
   (b) Summe der Flächen: $\sum r_i^2$
   (c) Kugelvolumen: $\sum r_i^3$

(1)(a), (2)(a) ist sehr leicht: Es gibt immer eine Optimallösung, die nur aus einem einzigen Kreis besteht.

Viele Probleme sind (NP-)schwer. Was tun?!

Möglichkeiten:

(A) Hart arbeiten

(B) Mit dem Schicksal hadern

(C) Auf Glück vertrauen

(D) Ansprüche herunterschrauben

Beispiel 5.8 (TSP):
$q+1 = 10$ Städte ($q! = 362\,880$ Permutationen)

Betrachte LP:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{e\in E} c_e x_e & \\
\text{unter} \quad & \sum_{e\in\delta(v)} x_e = 2 \\
& \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2 \quad (\forall\, S:\ \emptyset \neq S \subsetneq V) \\
& x_e \geq 0, \qquad x_e \leq 1
\end{aligned}$$

Beispiel 5.9 (Gewichtsminimales Matching in Graphen):
(Graph nicht notwendig bipartit)

$$\begin{aligned}
\min \sum_{e\in E} c_e x_e & \\
\text{unter} \quad & \sum_{e\in\delta(v)} = 1 \quad (\forall\, v \in V) \\
& x_e \geq 0
\end{aligned}$$

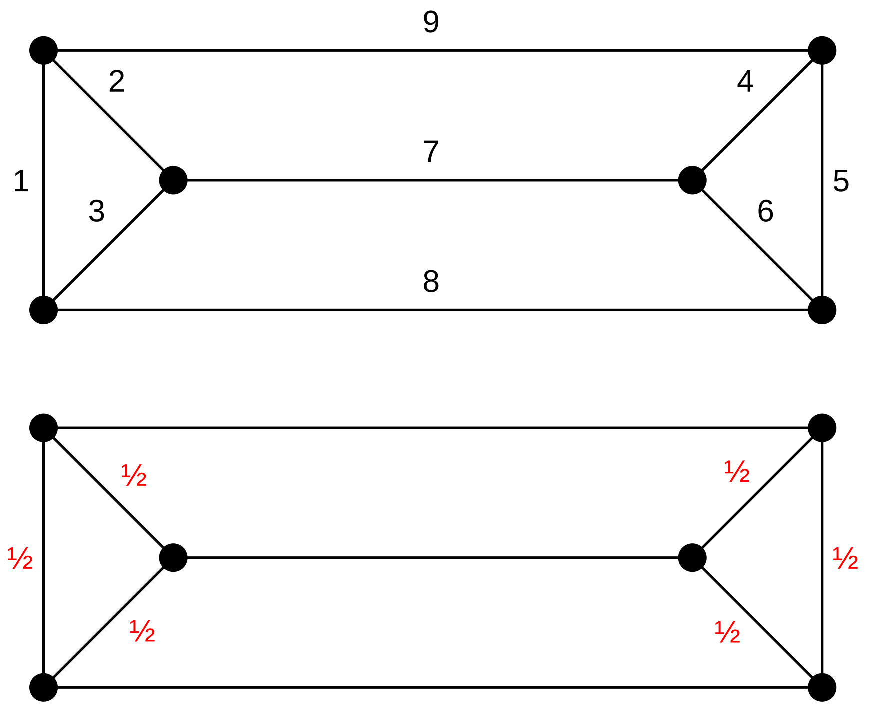


Abbildung 5.1: Zielfunktionswert = 10,5

Dual:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{v\in V} 1\cdot y_v \\
&\text{unter} \qquad \sum_{e\in\delta(v)} y_v \le c_e \quad (\forall\, e\in E) \\
&\qquad\qquad y_v \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Abbildung 5.2: Zielfunktionswert = 10,5

$$y_1 + y_2 = 4$$

$$y_1 + y_3 = 5$$
$$y_2 + y_3 = 6$$

Betrachte LP mit Blossom Constraints[?]:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{e \in E} c_e x_e \\
&\text{unter} \qquad \sum_{e \in \delta(v)} = 1 \quad (\forall\, v \in V) \\
&\qquad\qquad \sum_{e \in S} x_e \geq 1 \quad (\forall\, S:\; \emptyset \neq S \subsetneq V,\; |S| \text{ ungerade}) \\
&\qquad\qquad x_e \geq 0
\end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{v \in V} y_v \quad + \sum_{\substack{S \subsetneq V, \\ |S| \ \mathit{ungerade}}} y_S \\
&\text{unter} \qquad \sum_{e \in \delta(v)} y_v + \sum_{e \in \delta(S)} y_S \leq c_e \quad (\forall\, e \in E) \\
&\qquad\qquad y_v \in \mathbb{R} \qquad\qquad y_S \geq 0
\end{aligned}$$