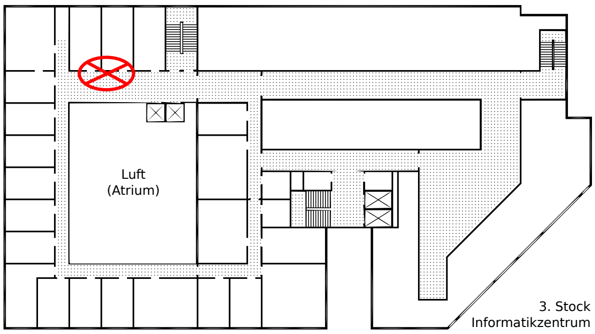
Abteilung Algorithmik **Winter 2017/18**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 5 vom 09.01.2018

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 5 ist bis Dienstag, den 23.01.2018 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Aufgabe 1 (Dualisieren): Dualisiere die folgenden LPs:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s. t.} & -2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 25 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \\
\text{s. t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & \leq 12 \\
 & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq 7 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leq 10 \\
 & & & & & x_1, & \dots, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s. t.} & -2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & 25 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30
\end{array}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Abstrakt Dualisieren): Dualisiere das folgende LP und beschreibe dabei deine Vorgehensweise

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{e \in E} x_e * c(e) \\
\text{s.t.} \quad \sum_{e \in E(U, V \setminus U)} x_e \geq 1 \quad \forall U \subset V, S \neq \emptyset \\
x_e \geq 0 \quad \forall e \in E
\end{aligned}
$$

(für einen Graphen $G(V,E)$ mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{N}$, $E(U,W) = \{vw \in E \mid v \in U, w \in W\}$) **(10 Punkte)**

Aufgabe 3 (Komplementärer Schlupf): Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$
(P) \left\{ \begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s. t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

a) Formuliere das duale Problem zu (P).

b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).

c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Primale und duale LPs): Ein LP ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder optimal lösbar. Wie ist hierbei das Verhältnis von primalen und dualen Problem: Welche der 9 Kombinationsmöglichkeiten sind möglich? Gebe Begründungen oder Beispiele mit an. **(10 Punkte)**

Aufgabe 5 (Column Generation): Für viele Optimierungsprobleme brauchen wir am Ende nur einen Bruchteil der Variablen. Oft lässt sich anhand der Kostenfunktion auch gut vorhersagen, welche Variablen für die optimale Lösung nützlich sein könnten.

Betrachte das Minimum Weight Perfect Matching Problem. Für einen Graph $G(V,E)$ soll ein perfektes Matching gefunden werden, sodass die Summe der Gewichte $d(v,w)$ aller gematchten Knotenpaare $v, w \in V$ minimal ist. Das Linear Program zu dem Problem ist

$$
\begin{aligned}
\min \quad \sum_{vw \in E} x_{vw} * d(v,w) \\
\text{s.t.} \quad \sum_{vw \in E(v)} x_{vw} = 1 \quad \forall v \in V \\
x_{vw} \geq 0 \quad \forall vw \in E
\end{aligned}
$$

und das zugehörige duale Problem

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} y_v \\ \text{s.t.} \quad & y_v + y_w \le d(v, w) \quad \forall vw \in E \end{aligned}$$

a) Gegeben sei der Graph $G = (\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_0v_1, v_0v_5, v_2v_3, v_4v_5\})$ mit $d(v_0, v_1) = 1.1$, $d(v_2, v_3) = 1.0$, $d(v_4, v_5) = 1.2$, und $d(v_0, v_5) = 1.0$. Gebe eine optimale primale und duale Lösung an. Hinweis: Dies benötigt keinen Simplex.

b) Das eigentliche Problem hat noch einige weitere Kanten, aber wir wissen, dass diese alle mindestens das Gewicht 2.41 haben. Was passiert im primalen und dualen Problem wenn wir eine weitere Kante zum Graphen hinzufügen? Argumentiere über die duale Lösung, warum wir diese zusätzlichen Kanten nicht betrachten müssen (also keine dieser Kanten unsere optimale Lösung verändert).

c) Was passiert im primalen und dualen Problem wenn wir die Kante v_1v_4 mit $d(v_1, v_4) = 1.0$ hinzufügen? Gebe die zugehörige optimale primale und duale Lösung an.

d) Wie kompliziert ist es eine neue Variable zu einem bereits gelöstem Simplex Tableau hinzuzufügen und dieses zu optimieren? (A_B^{-1} des ehemals optimalen Tableaus wurde gespeichert.)

(10 Punkte)

Aufgabe 6 (Modellierung): Modelliere die beiden folgenden Problem jeweils als IP. Beschreibe dabei jede Restriktion kurz mit eigenen Worten.

a) Gegeben sei ein Behälter der Größe W, sowie n Objekte mit Größen w_i und Profiten p_i, $i = 1, \ldots, n$. Ziel ist es, den Behälter so zu befüllen, dass der Profit maximal ist.

b) Gegeben seien unendlich viele Behälter der Größe 1, sowie n Objekte mit Größen w_i, $i = 1, \ldots, n$. Ziel ist es, alle Objekte in möglichst wenige Behälter zu packen. (Hinweis: Eine Menge von Objekten kann in einen Behälter gepackt werden, wenn die Summe der Größen kleiner als die Behältergröße ist.)

(10 Punkte)