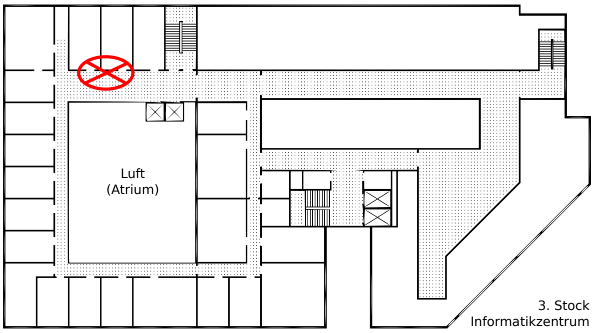
Abteilung Algorithmik **Winter 2017/18**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 4 vom 12.12.2017

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 4 ist bis Dienstag, den 09.01.2018 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Aufgabe 1 (Simplex-Tableau): Löse die folgende LPs mit dem Simplex-Algorithmus.

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\min & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} \; - & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\
& x_1 & & & + & x_3 & \leq & 25 \\
& & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & \leq 12 \\
& x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq 7 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leq 10 \\
& & & & & x_1, & \dots, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} \; - & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\
& x_1 & & & + & x_3 & \leq & 25 \\
& & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & \mathbf{1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\
& -x_1 & + & 2x_2 & \geq & 10 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & \mathbf{1}
\end{array}$$

Benutze zum Lösen der LPs die Darstellung im Tableau. Argumentiere in jedem Schritt kurz, warum du die gewählte Variable in die Basis aufnimmst, welches das neue Pivotelement ist und warum. Nutze für das dritte und vierte LP den 2-Phasen Simplex (Vorlesung am 19.12.2017). **(28 Punkte)**

Aufgabe 2 (Reduzierte Kosten):

(a) Sei $c^T = (4, 6, 0, 0, 0)$ gegeben. Angenommen, das folgende Tableau ist ein Zwischenschritt im Simplex. Berechne die reduzierten Kosten $\overline{c}_i, 1 \leq i \leq 5$ und den aktuellen Zielfunktionswert z.

$\overline{c}_1$	$\overline{c}_2$	$\overline{c}_3$	$\overline{c}_4$	$\overline{c}_5$	$-z$
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35

(b) Sei $c^T = (3, 2, 1, 0, 0, 0)$ gegeben. Angenommen, das folgende Tableau ist ein Zwischenschritt im Simplex. Berechne die reduzierten Kosten $\overline{c}_i, 1 \leq i \leq 6$ und den aktuellen Zielfunktionswert z.

$\overline{c}_1$	$\overline{c}_2$	$\overline{c}_3$	$\overline{c}_4$	$\overline{c}_5$	$\overline{c}_6$	$-z$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$
0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{90}{2}$
0	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{65}{2}$

(12 Punkte)

Aufgabe 3 (Eigenes Beispiel für den Simplex-Algorithmus): Überlege dir ein eigenes LP (P) und löse es mit Hilfe des Simplex-Algorithmus'. (P) soll in der Form $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ sein und folgende Anforderungen erfüllen:

- Die Lösungsmenge von (P) ist nicht leer. (P) darf unbeschränkt sein, muss aber nicht.
- (P) ist zweidimensional, kommt also mit den Variablen x_1 und x_2 aus.
- Es gibt in (P) mindestens fünf Ungleichungen, die nicht die Form $0 \leq 0$ oder $-\alpha x_i \leq 0$ für ein $\alpha \geq 0$ haben.
- (P) enthält eine degenerierte, zulässige Basislösung.
- Eine der Ungleichungen von (P) ist redundant. Das ist genau dann der Fall, wenn sich die Lösungsmenge von (P) durch Weglassen dieser Ungleichung nicht ändert.

Achte bei der Konstruktion darauf, dass alle Teilaufgaben erfüllbar sind, zum Beispiel darauf dass überhaupt genug (degenerierte) Simplex-Schritte möglich sind.

a) Schreibe (P) als Ungleichungssystem, zeichne es auf und markiere die zulässige Lösungsmenge.

b) Bringe (P) in die Form $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ und schreibe es in der Tableaudarstellung.

c) Wende den Simplex-Algorithmus auf (P) an. Du darfst in jedem Schritt eine beliebige Pivotspalte mit positiven reduzierten kosten auswählen. Dabei sollen mindestens 4 Simplex-Schritte gemacht werden, mindestens einer davon degeneriert.

d) Gib für jedes Tableau aus der vorigen Teilaufgabe die aktuelle Basis, Nichtbasis und Basislösung an. Markiere jeweils, ob die aktuelle Basislösung degeneriert ist, ob sie optimal oder ob das LP unbeschränkt ist und woran du all das im Tableau erkennst.

e) Markiere die Schritte des Simplex-Algorithmus' in deiner Zeichnung.

(Hinweis: Sorge dafür, dass $x_1 = x_2 = 0$ eine zulässige Basislösung von (P) ist, damit du sie als Startbasis für den Simplex-Algorithmus benutzen kannst.) **(20 Punkte)**

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!