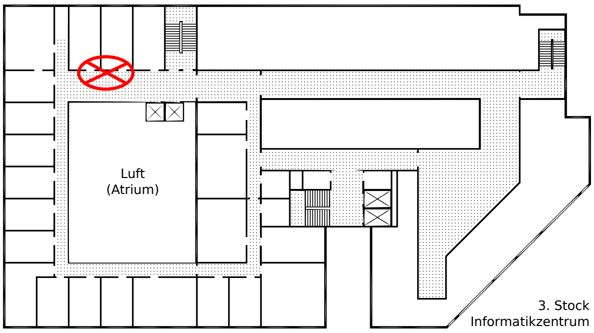
Abteilung Algorithmik **Winter 2017/18**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 3 vom 12. 12. 2016

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 3 ist bis Dienstag, den 28. 11. 2017 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Anmerkung: Anstelle von CPLEX könnt ihr auch wie bisher die Javascript-Implementierung des GLPK (`http://hgourvest.github.io/glpk.js/`) nutzen. CPLEX ist jedoch bedeutend leistungsstärker und für Studenten frei erhältlich. Solltet ihr vor haben, Linear und Integer Programming produktiv auf größeren Instanzen anzuwenden, empfiehlt es sich bereits jetzt CPLEX oder einen vergleichbaren Solver zu beginnen.

Aufgabe 1 (Modellierung & CPLEX): Ein Energiekonzern möchte die Lieferungen von Rohstoffquellen und -anbietern zu Raffinerien neu organisieren. Es handelt sich dabei um *nicht raffiniertes Erdöl (UE)*, *nicht raffinierte Steinkohle (US)* und *nicht raffinierte Braunkohle (UB)*. Diese Rohstoffe werden als U zusammengefasst.

Zusätzlich zum konzerneigenen Rohstoffabbau gibt es für jeden dieser Rohstofftypen externe Zulieferer. Diese Zulieferer werden als Quellen Q zusammengefasst. Jedes $q \in Q$ hat für jeden Rohstofftypen $u \in U$ eine Höchstkapazität k_q^u (hat also ein Lieferant q keine Braunkohle im Angebot, ist $k_q^{UB} = 0$).

Es sollen die Raffinerien R beliefert werden. Diese sind jeweils in der Lage, bestimmte Rohstoffe aus U zu verarbeiten. Der Bedarf nach einem Rohstoff $u \in U$ einer Raffinerie $r \in R$ ist d_r^u.

Rohstoffe werden natürlich nicht verschenkt. Des Weiteren hängen die Lieferkosten nicht nur vom jeweiligen Anbieter ab, sondern auch von der Länge des Transportweges. Der Preis, den ein Anbieter $q \in Q$ für eine Einheit des Rohstoffs $u \in U$ verlangt, ist t_{qr}^u. Die Kosten für den Transport zur Raffinerie $r \in R$ ist in diesem Preis enthalten.

(a) Modelliere das obige Problem für allgemeine U, Q und R als LP. Die kosten sollen minimiert werden. Dokumentiere, was deine Variablen und Constraints bedeuten.

Quelle	Rohstoff	Kapazität
Lieferant q_1	Erdöl	5000
	Braunkohle	5000
	Steinkohle	5000
Pipeline q_2	Erdöl	500
Konzerneigene Kohlegrube q_3	Braunkohle	400
Konzerneigene Bohrinsel q_4	Erdöl	1200

Tabelle 1: Kapazitäten der Rohstoffquellen

Raffinerie	Rohstoff	Bedarf
Raffinerie r_1	Erdöl	1500
Raffinerie r_2	Erdöl	2500
Kohleaufbereitungsanlage r_3	Steinkohle	1200
	Braunkohle	800

Tabelle 2: Rohstoffbedarf der Raffinerien

		r_1	r_2	r_3
q_1	Erdöl	251	245	—
	Steinkohle	—	—	114
	Braunkohle	—	—	97
q_2	Erdöl	262	263	—
q_3	Braunkohle	—	—	14
q_4	Erdöl	20	44	—

Tabelle 3: Kosten für Transport und Einkauf

(b) Löse das in den Tabellen angegebene Szenario mit CPLEX. Abzugeben ist die `.lp` Datei und `cplex.log`. Markiere in der Ausgabe die Lösung und den Zielfunktionswert und beschreibe kurz, wie die Lösung zu interpretieren ist. (Hinweis: In `cplex.log` wird *alles* mitgeschrieben, was ihr mit cplex versucht habt. Gebt bitte nur den relevanten Teil ab.)

(13+12 Punkte)

Aufgabe 2 (Modellierung & CPLEX): Wir wollen das Modell aus Aufgabe 1 erweitern. Es soll nun zusätzlich noch geregelt werden, wie viel Rohstoffe welche Raffinerie verarbeitet. In den Raffinerien werden die nicht raffinierten Rohstoffe aus U zu seiner raffinierten Variante verarbeitet. Diese werden in T zusammengefasst und umfassen *raffiniertes Erdöl (RO)*, *raffinierte Braunkohle (RB)* und *raffinierte Steinkohle (RS)*. Aus dem Rohstoff US kann stets nur das Produkt RS werden und so weiter.

Jede Raffinerie $r \in R$ kann eine Einheit vom Rohstoff $u \in U$ in $0 \leq c_r^u \leq 1$ Einheiten von seinem weiterverarbeiteten Pendant veredeln. Kann r den Rohstoff u nicht verarbeiten, ist $c_r^u = 0$.

Der Konzern benötigt am Ende d^t von jedem Produkt $t \in T$. Damit die Raffinerien nicht geschlossen werden müssen, sollen in Raffinerie $r \in R$ mindestens d_r^t davon produziert werden.

Bei den Erdölraffinerien existiert noch eine Besonderheit: Bei der Produktion von raffiniertem Öl entstehen diverse Nebenprodukte. Diese Nebenprodukte können allerdings von dem Konzern nicht weiterverarbeitet oder verwendet werden, weshalb sie verkauft werden können. Für jede Einheit RO entstehen in Raffinerie $r \in R$ Nebenprodukte im Wert von n_r.

Raffinerie	Rohstoff	Effizienz	Nebenprodukte	Anforderungen
Raffinerie r_1	Erdöl	$c_{r_1}^{UO} = 0.6$	$n_{r_1}^{RO} = 120$	$d_{r_1}^{RO} = 1000$
Raffinerie r_2	Erdöl	$c_{r_2}^{UO} = 0.7$	$n_{r_2}^{RO} = 200$	$d_{r_2}^{RO} = 1000$
Kohleaufbereitungs-	Braunkohle	$c_{r_3}^{UB} = 0.4$	—	$d_{r_3}^{RB} = 100$
anlage r_3	Steinkohle	$c_{r_3}^{US} = 0.8$	—	$d_{r_3}^{RS} = 100$

Tabelle 4: Rohstoffbedarf, Verarbeitungseffizienz und Nebenprodukte

(a) Modelliere das vorliegende Problem für allgemeine Q und R als LP, welches die Kosten für den Konzern minimiert. Dokumentiere, was deine Variablen und Nebenbedingungen bedeuten.

(b) Löse das in den Tabellen angegebene Szenario mit CPLEX. Abzugeben sind die `.lp` Datei und `cplex.log`. Markiere wieder in der Ausgabe die Lösung und den Zielfunktionswert und beschreibe kurz, wie deine Lösung zu interpretieren ist. Die globalen Anforderungen sind 5000 Einheiten raffiniertes Öl und jeweils 2000 Einheiten raffinierte Stein- und Braunkohle herzustellen.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Lösungsmengen von LPs): Betrachte ein LP in der Form

$$(P) \begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei sei $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ die Menge der zulässigen Lösungen von (P). Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) Es gilt immer $L \neq \emptyset$.

(b) Wenn $L \neq \emptyset$, dann existiert auch $\max\{c^T x \mid x \in L\}$.

(c) Wenn $\max\{c^T x \mid x \in L, x \text{ Basislösung}\}$ existiert, dann existiert keine weitere Basislösung mit dem selben Optimalwert.

(1+2+2 Punkte)

Aufgabe 4 (Basen, Nichtbasen, Basiswechsel): Gegeben ist das LP (P) in Abbildung 1 mit Ungleichungen $(1), \ldots, (8)$, dessen zulässige Lösungsmenge grau markiert ist.

a) Gib alle Basen von (P) an, deren Basislösungen im gestrichelten Bereich liegen und markiere diese in Abbildung 1. Dabei sei x_i die Schlupfvariable von Ungleichung (i). (Hinweis: Es werden nur $x_1, \ldots, x_8$ benötigt.)

b) Zeichne den Graphen G, dessen Knoten die Menge aller Basen aus der vorigen Teilaufgabe sind. Zwischen zwei Basen existiert genau dann eine Kante, wenn sie sich in nur einer Basisvariable unterscheiden. Beschrifte die Knoten mit der assoziierten Basis und die Kanten mit den auszutauschenden Variablen.

c) Seien B_1 und B_2 diejenigen zulässigen Basen, deren Basislösungen den geringsten bzw. höchsten Zielfunktionswert besitzen. Gib eine Sequenz von Basiswechseln an, die nur zulässige Basen enthält und von B_1 zu B_2 führt. Markiere diese Sequenz in Abbildung 1 und in G.

(10 Punkte)

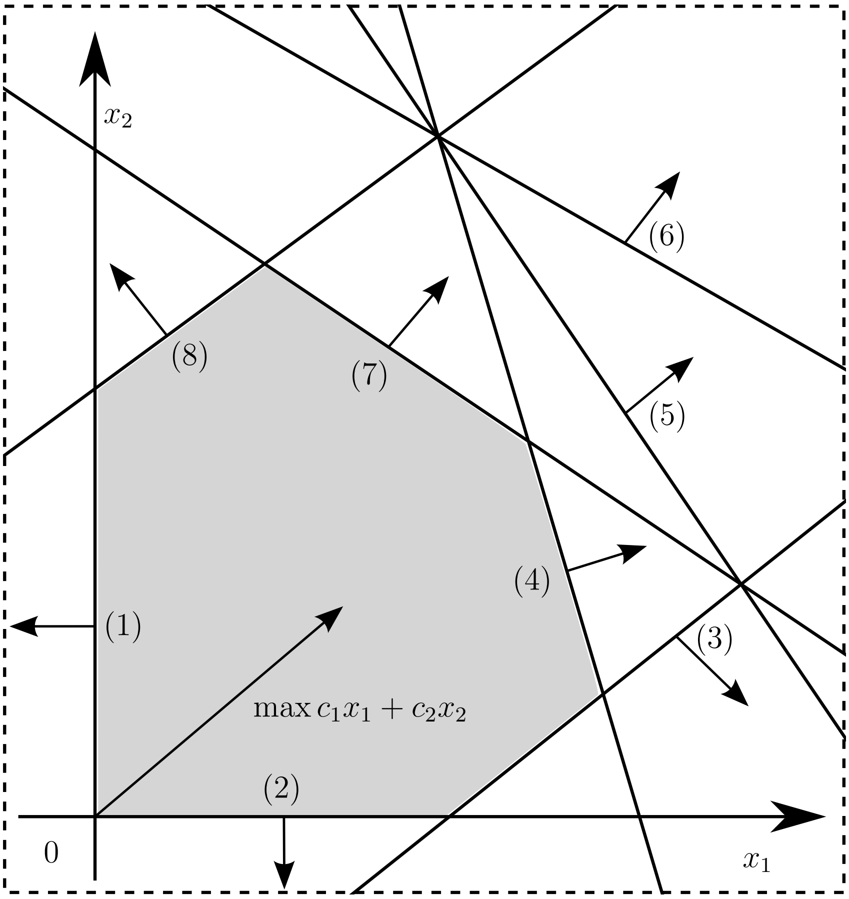


Abbildung 1: Das LP (P) aus Aufgabe 4