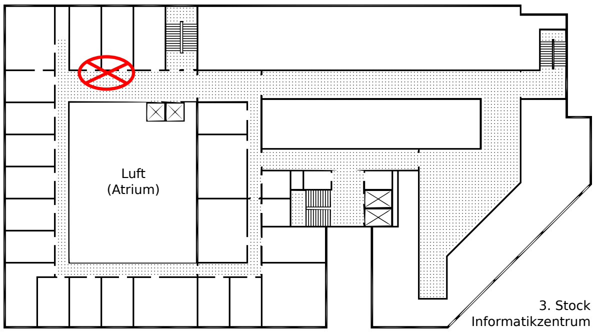
**Abteilung Algorithmik** **Winter 2017/18**
**Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund**
**TU Braunschweig**

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dominik Krupke

# Mathematische Methoden der Algorithmik
# Übungsblatt 2 vom 14. 11. 2017

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 2 ist bis Dienstag, den 28. 11. 2017 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

**Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!**




**Aufgabe 1 (Formen von LPs):** Betrachte das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$
(P)\left\{\begin{array}{lrcrcr}
\min & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 9 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \geq & 8 \\
& 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 40 \\
& x_1 & & & \leq & 8 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

Schreibe das lineare Programm $P$ in den Formen

(a) $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

(b) $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

(c) $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \text{ frei}\}$.

Die Matrixschreibweise ist nicht gefordert. **(10 Punkte)**

**Aufgabe 2 (Integer Programming):** In der letzten Übung haben wir Semsterplanung als Integer Program formuliert und mittels entsprechende Software gelöst. Wir wollen nun noch weitere Bedingungen umsetzen:

- Wenn zwei Fächer in der gleichen Woche geprüft werden, reduziert sich unser Spass um eine Konstante.

- Ein weiteres Praktikum erfordert, dass wir mindestens zwei von drei Vorkursen belegt haben. Also um Praktikum $D$ zu machen, müssen wir auch mindestens zwei von den Kursen $A, B$ oder $C$ belegen.

Beschreibe, wie sich dies implementieren ließe. **(15 Punkte)**

**Aufgabe 3 (Gauß-Verfahren):** Zeige, dass die folgenden Operationen den Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems nicht verändern.

- Vertauschen von zwei Gleichungen
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar
- Addition eines skalaren Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Zeige dazu, dass jede Lösung $x$ vor einer Operation, auch eine Lösung nach der Operation ist. Zeige zusätzlich, dass eine Operation mit einer anderen Operation rückgängig gemacht werden kann. **(10 Punkte)**

**Aufgabe 4 (Lineare Unabhängigkeit):**

a) Skizziere die folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und die davon aufgespannten Unterräume.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

b) Welche der folgenden Mengen sind linear abhängig? Begründe deine Antwort.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

**(3+7 Punkte)**

**Aufgabe 5 (LP-Formulierung eines Optimierungsproblems):** Formuliere das folgende Optimierungsproblem als LP: Gegeben $n$ Punkte $(x_i, y_i)$ in der Ebene. Gesucht ist eine Gerade, die das Maximum der vertikalen Abstände zu den Punkten minimiert. Löse das Problem für $\{(1, 10), (3, 6), (4, 7), (6, 5), (8, 2), (9, 4)\}$ optimal etwa mit `http://hgourvest.github.io/glpk.js/`. **(15 Punkte)**