3.2 Problemdefinitionen:

PROBLEM 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s, Zielknoten t

Gesucht: Weg von s nach t, falls einer existiert

Allgemeiner:

PROBLEM 3.2 (Zusammenhangskomponente)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s

Gesucht: Menge aller von s erreichbaren Knoten (→ „Zusammenhangskomponente" von s)

Wege, die die Erreichbarkeit sichern

Beobachtung:

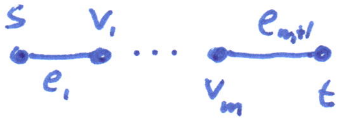
SATZ 3.3

Wenn ein Weg zwischen zwei Knoten s und t in einem Graphen existiert, dann existiert auch ein Pfad.

Beweis:

Sei: $W = s, e_1, v_1, \ldots, v_m, e_{m+1}, t$ ein Weg von s nach t.

Idee:



Eliminiere Kreise auf dem Weg!

Technische Umsetzung:

Betrachte unter allen Wegen einen W^* mit möglichst wenigen Kanten. Angenommen, W^* hat einen doppelt besuchten Knoten, sagen wir v_i:

$$W^* = s, e_1, v_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erster Besuch}}}{v_i}, e_{i+1}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{letzter Besuch}}}{v_i}, e_k, \ldots, t$$

Dann gäbe es einen noch kürzeren Weg:

$$W^{**} = s, e_1, v_1, \dots, v_i, e_k, \dots, t$$

↑ nur einmal besucht!

Das widerspricht der Annahme, dass W^* kürzestmöglich ist.
Also hat W^* keinen doppelt besuchten Knoten, ist also ein Pfad! □

Daraus ergibt sich bereits eine Konsequenz:

<u>KOROLLAR 3.4</u> („logische Zugabe")

Für Problem 3.2 gibt es als Erreichbarkeit sichernde Menge von Kanten immer eine Menge, die keinen Kreis enthält.

Und aus dem Beweis ergibt sich sogar eine Verschärfung:

<u>KOROLLAR 3.5</u>

Für Problem 3.2 gibt es immer eine kreisfreie Menge von Kanten, die die kürzestmögliche Erreichbarkeit sichert.

Das motiviert

<u>DEFINITION 3.6</u> (Wald, Baum)

(1) Ein <u>Wald</u> ist ein kreisfreier Graph.

(2) Ein <u>Baum</u> ist eine Zusammenhangskomponente in einem Wald.
(Also: ein kreisfreier, zusammenhängender Graph)

(3) Ein <u>aufspannender Baum</u> ist ein Baum, der alle Knoten verbindet. (Manchmal auch: <u>Spannbaum</u>. Englisch: "spanning tree")

3.3 Zusammenhangskomponenten

Idee: Löse Problem durch systematisches Hinzunehmen von Nachbarn!

(Beispiel)

Rot: im Baum, noch neue Nachbarn möglich
Gelb: im Baum

ALGORITHMUS 3.7 (Graphen-Scan-Algorithmus)

INPUT: Graph $G=(V,E)$, Knoten s

OUTPUT: Knotenmenge $Y \subseteq V$, die von s aus erreichbar ist, Kantenmenge $T \subseteq E$, die die Erreichbarkeit sicherstellt
- d.h. einen die Zusammenhangskomponente von s aufspannenden Baum (Y,T)

1. Sei: $R := \{s\}$, $Y := \{s\}$, $T := \emptyset$
2. WHILE $(R \neq \emptyset)$ DO {
   - 2.1 Wähle $v \in R$
   - 2.2 IF (es gibt kein $w \in V \setminus Y$ mit $e = \{v,w\} \in E$) THEN
     - 2.2.1 $R := R \setminus \{v\}$ // v erledigt
   - 2.3 ELSE {
     - 2.3.1 wähle ein $w \in V \setminus Y$ mit $e = \{v,w\} \in E$;
     - 2.3.2 Setze $R := R \cup \{w\}$, $Y := Y \cup \{w\}$, $T := T \cup \{e\}$

     }

   }
3. STOP