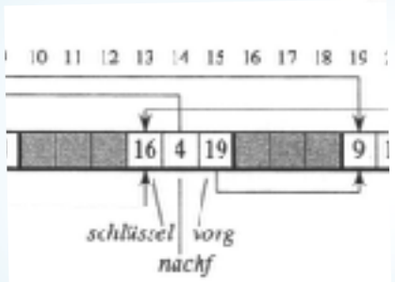
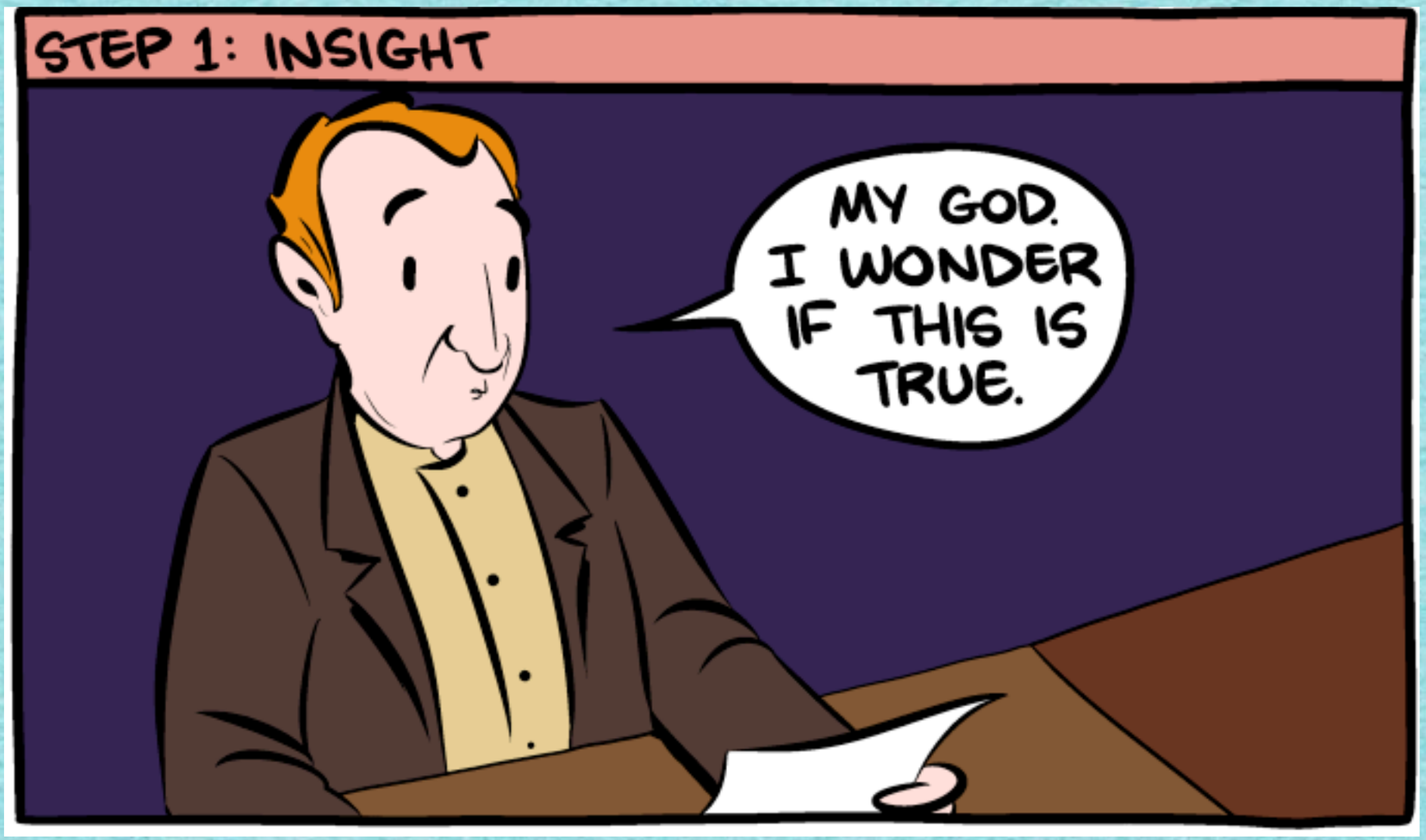


Kapitel 4.6: AVL-Bäume

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2017/18

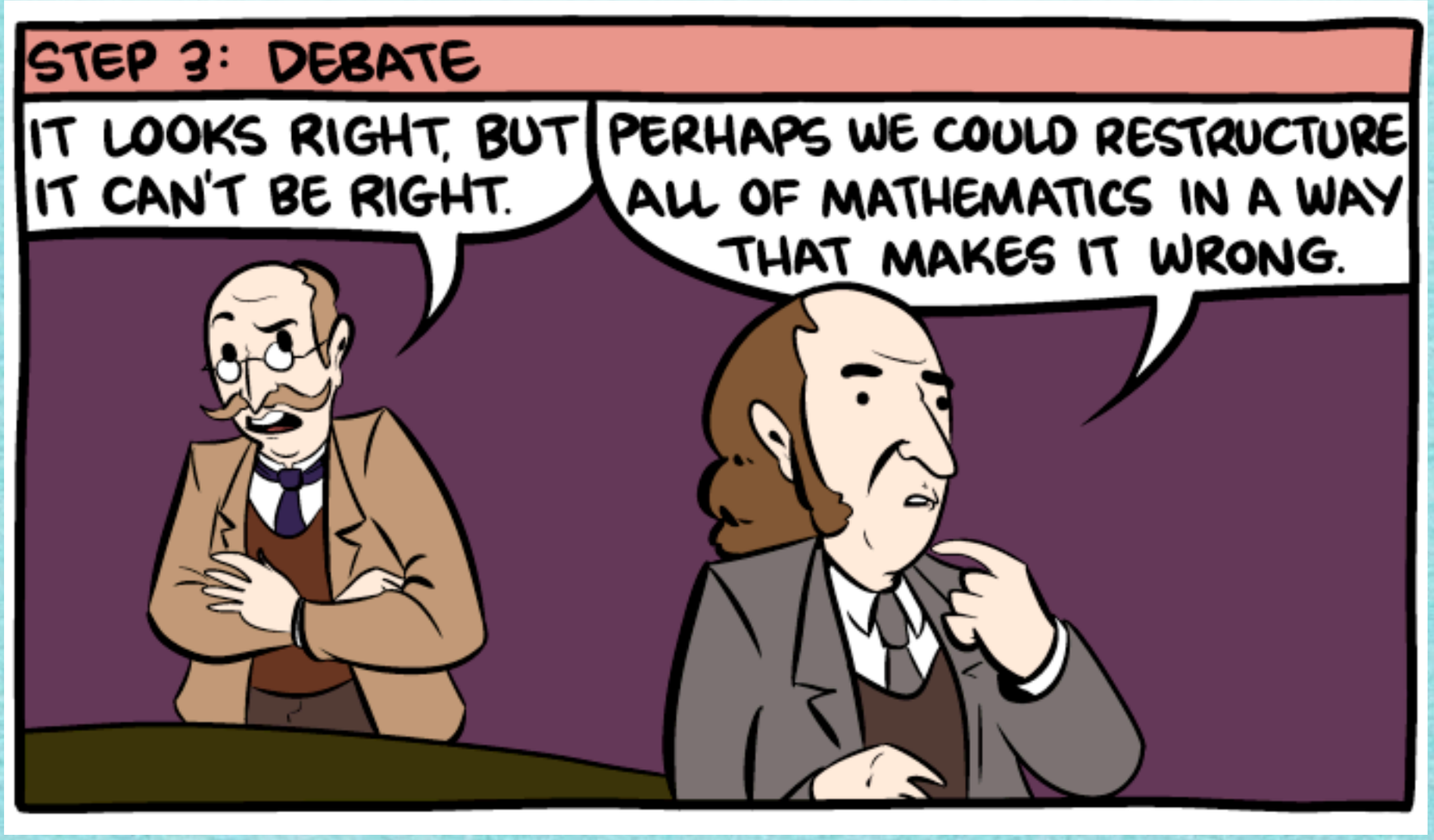
Prof. Dr. Sándor Fekete

HOW MATH WORKS:

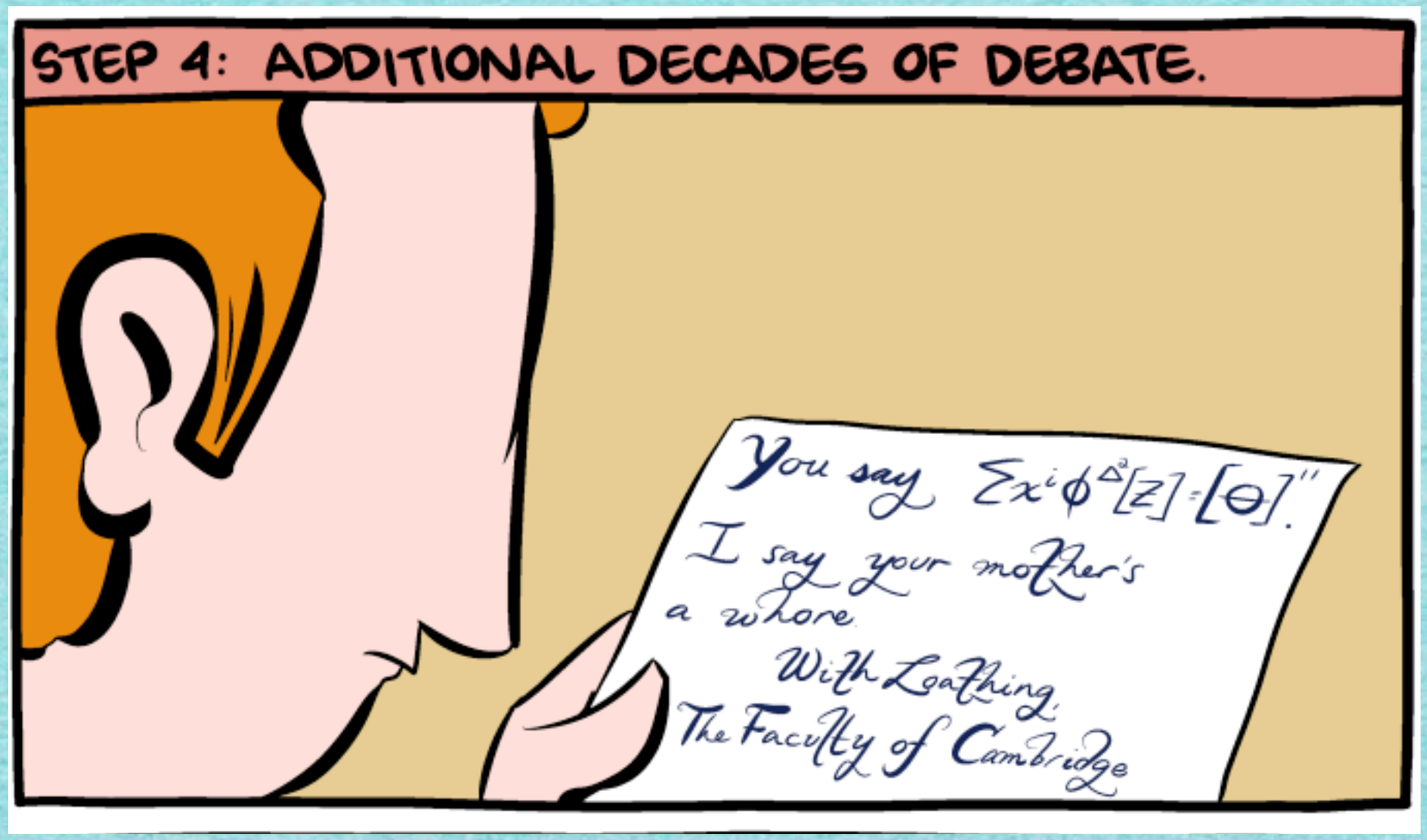


HOW MATH WORKS:

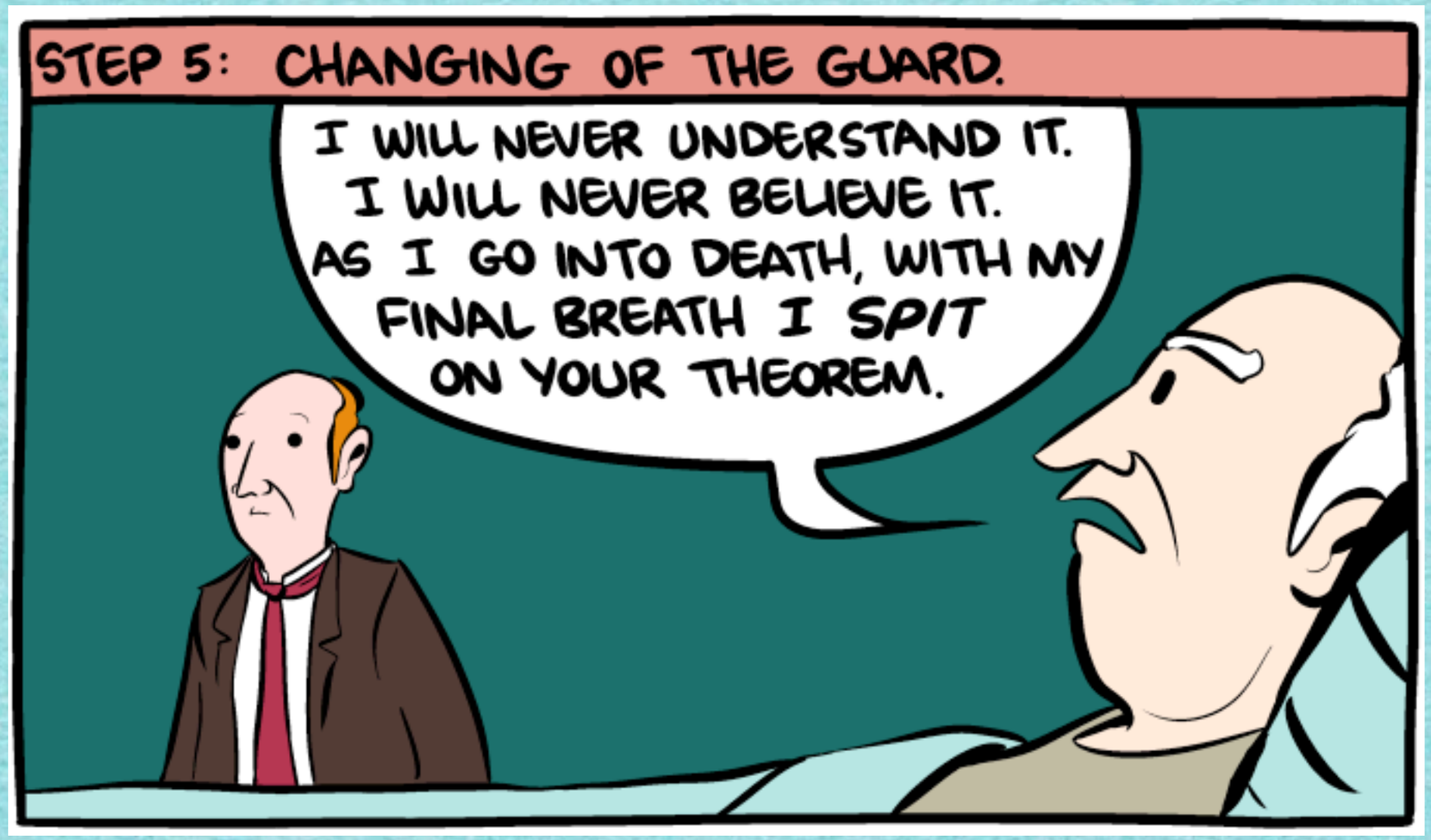
HOW MATH WORKS:



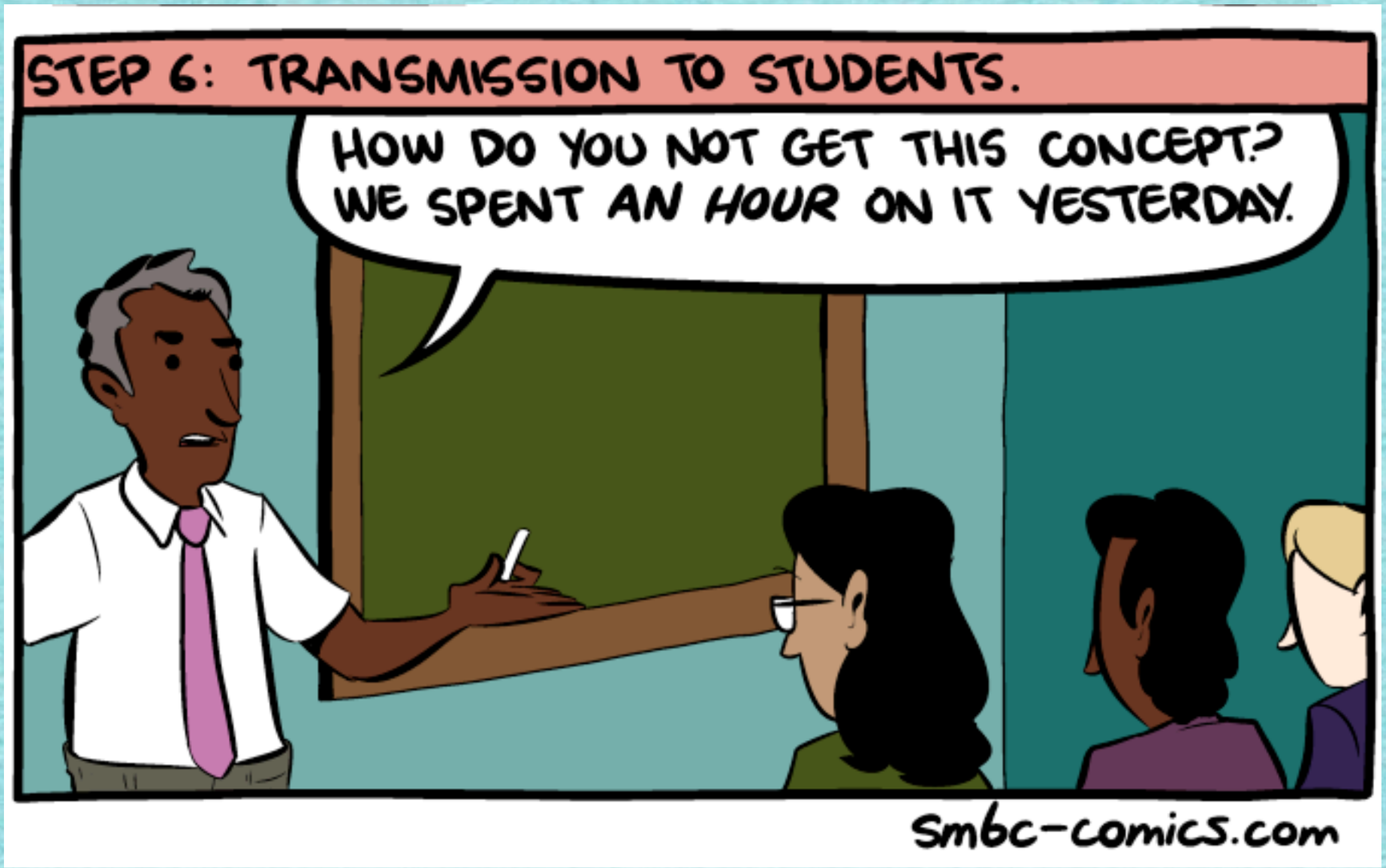
HOW MATH WORKS:



HOW MATH WORKS:



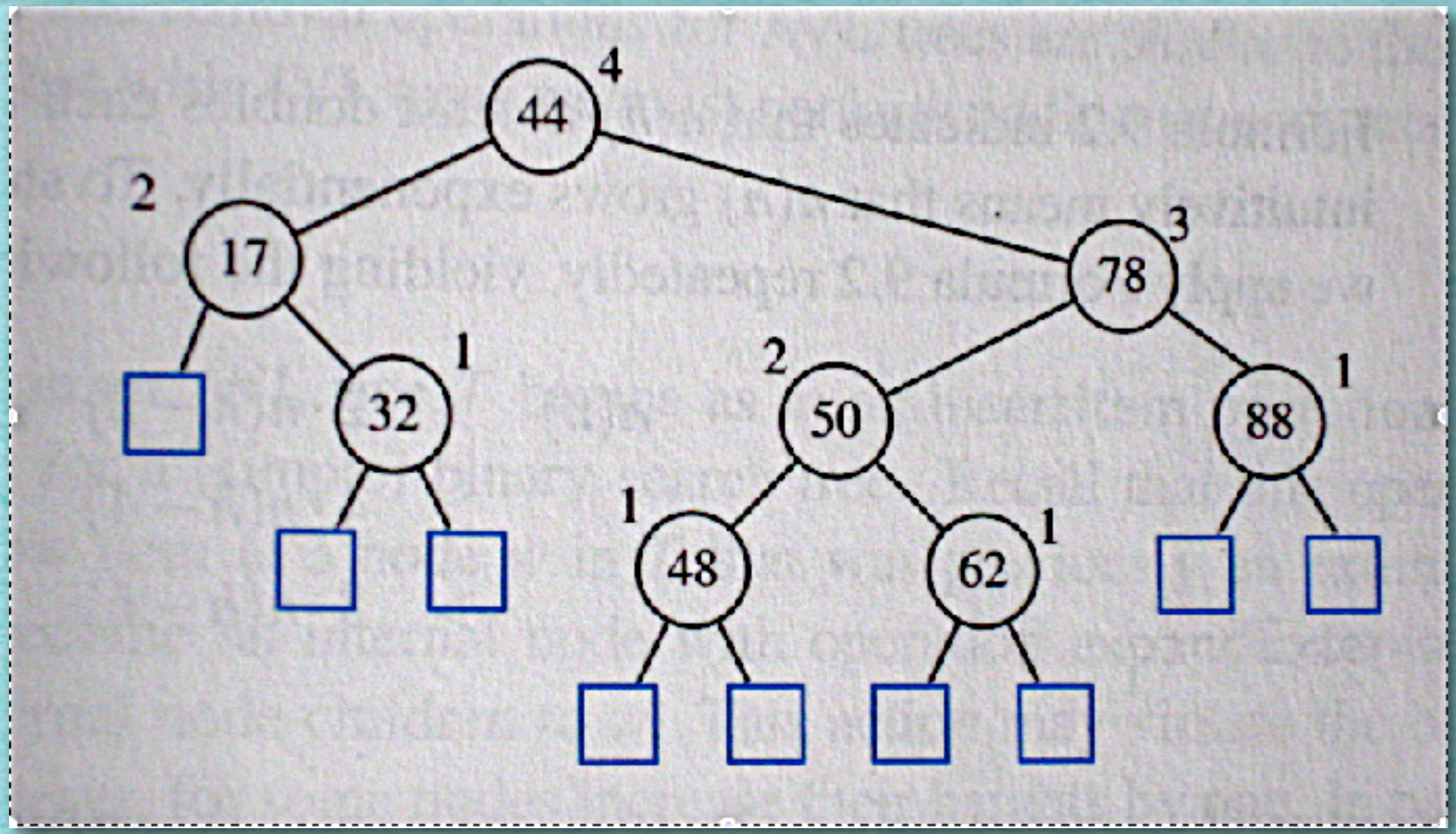
HOW MATH WORKS:



<u>Definition 4.7</u> (Nach Adelson-Velski und Landis, 1962)

(1) Ein binärer Suchbaum ist *<u>höhenbalanciert</u>*, wenn sich für jeden inneren Konten v die Höhe der beiden Kinder von v um höchstens 1 unterscheidet.

(2) Ein höhenbalancierter Suchbaum heißt auch *<u>AVL-Baum</u>*.



Satz 4.8

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat höchstens Höhe O(log n).

Beweis:

Wie gesehen!

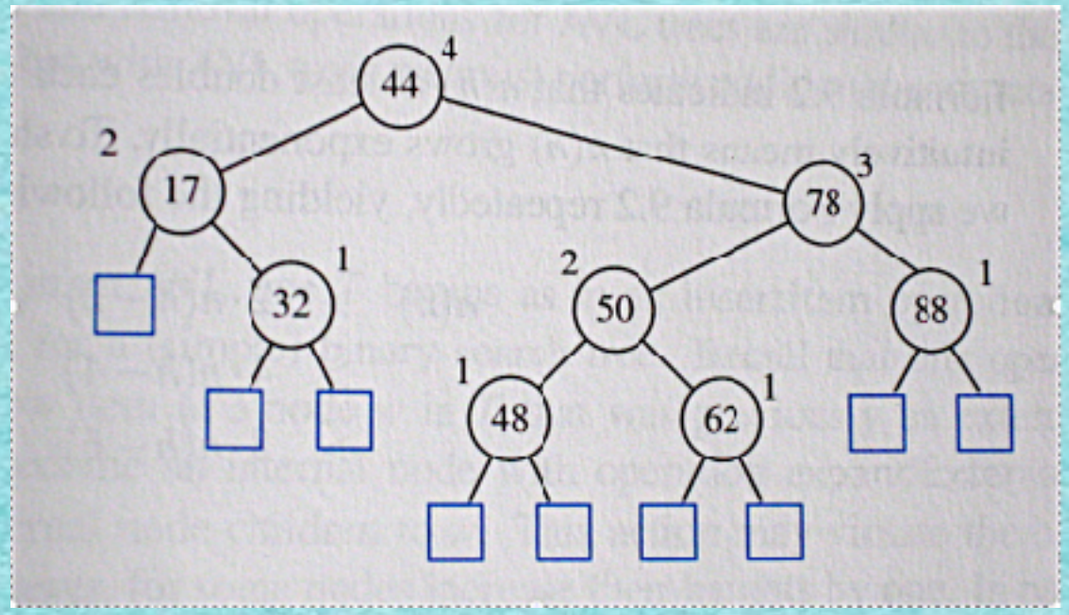
Damit noch offen:

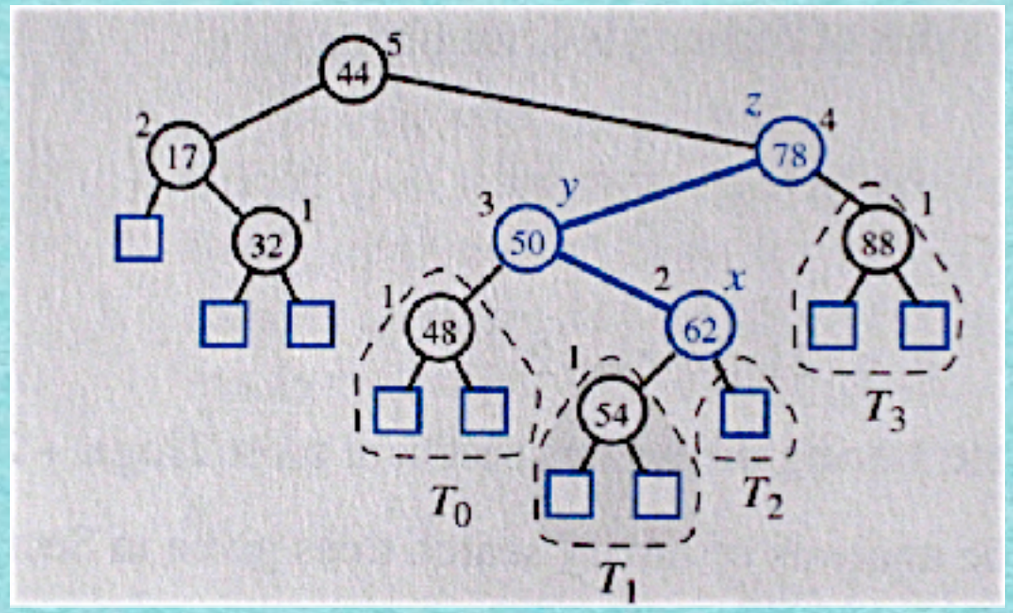
Wie erhält man Höhenbalanciertheit in dynamischen Situationen?

Einfügen („INSERT“)

<u>Aufgabe:</u>

- ***Füge 54 ein!***

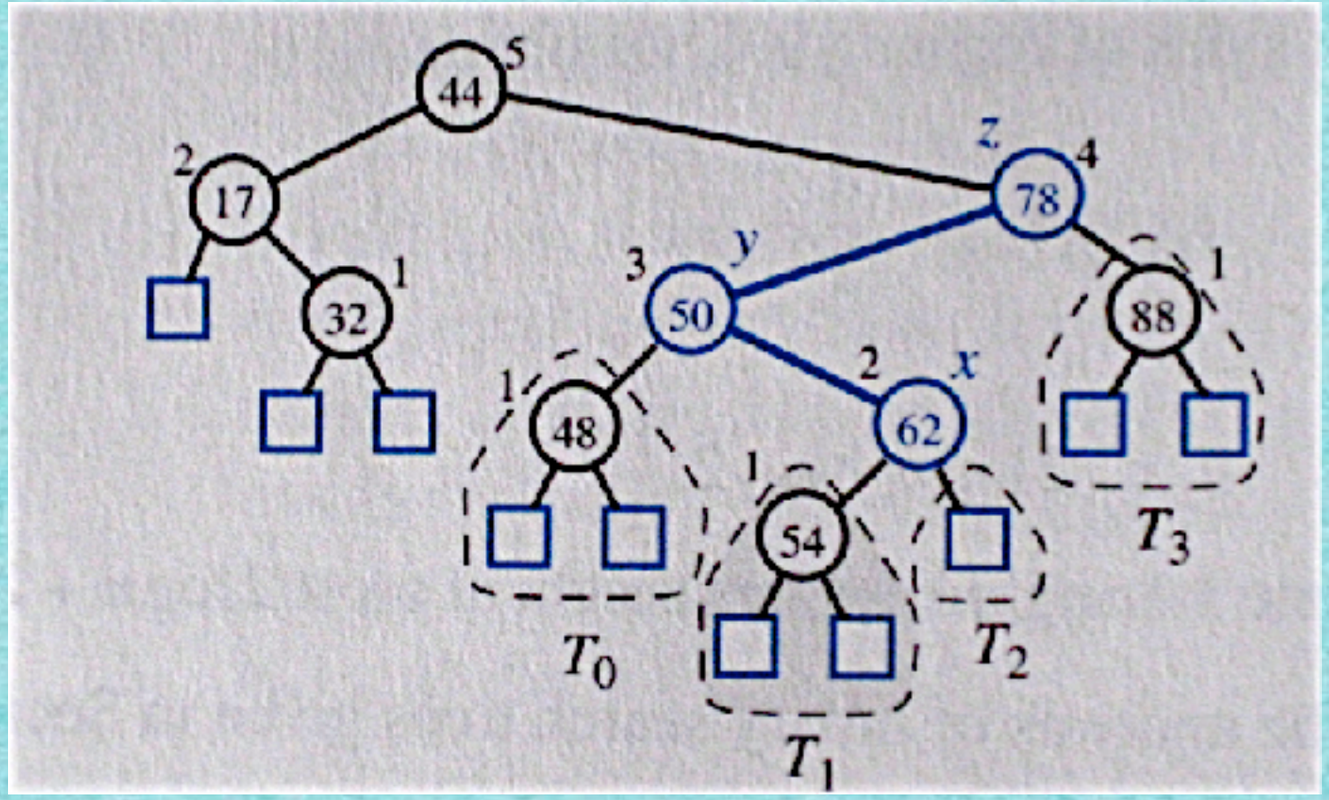




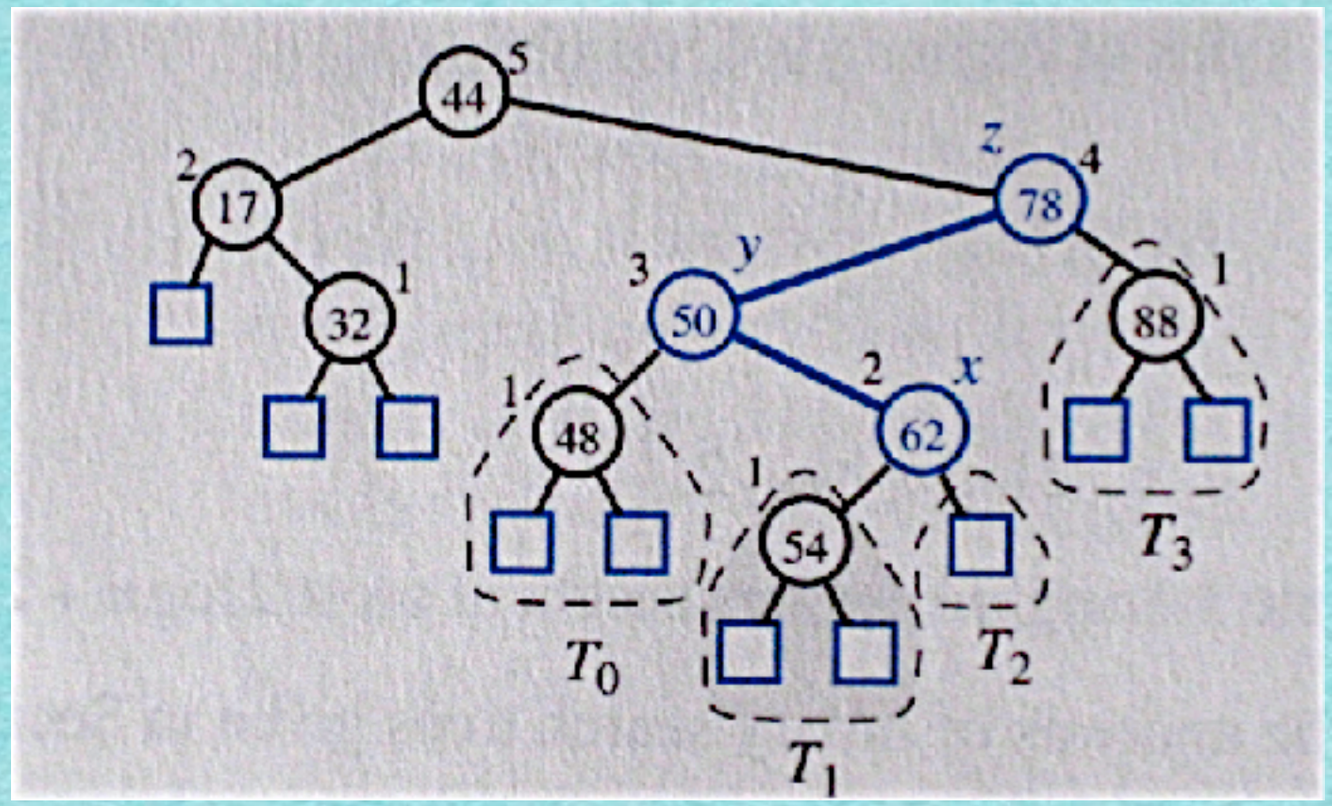
Einfügen

Idee:

- ***Höhenbalanciertheit ändert sich beim Einfügen einzelner Elemente nur wenig - und lokal!***



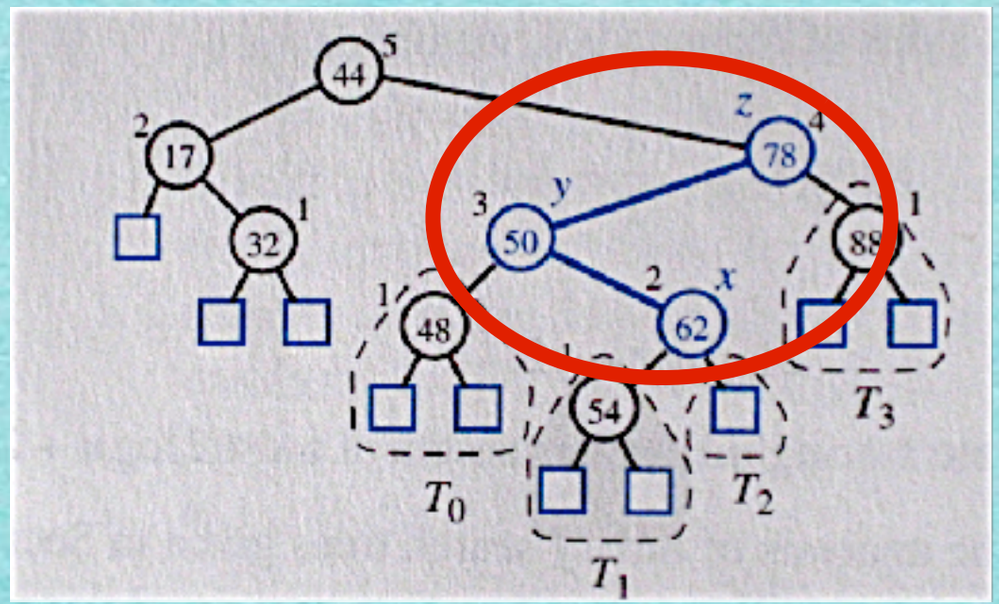
Einfügen

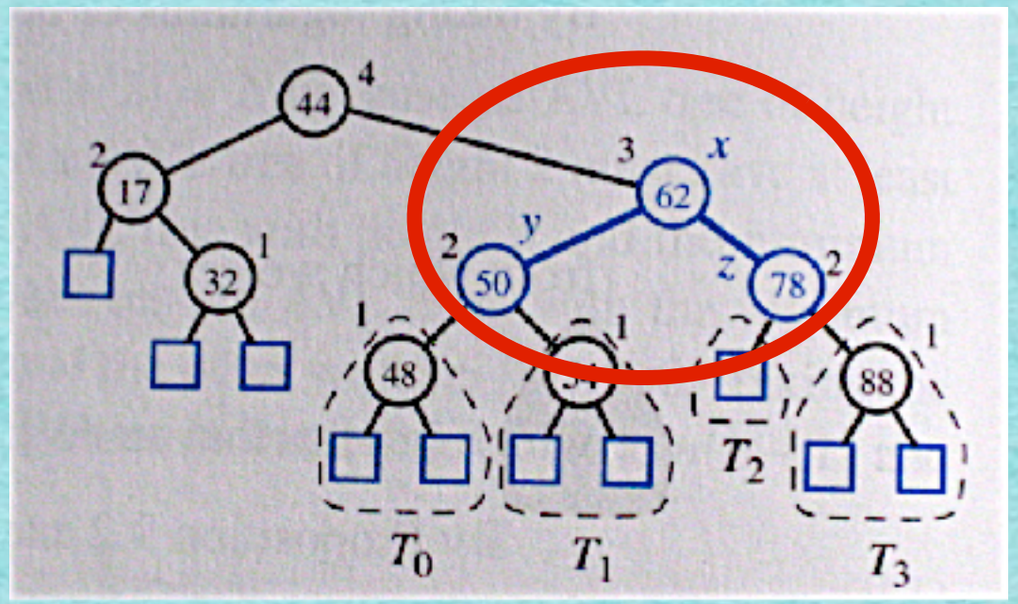


Was tun?

- ***Teilbaum der 78 ist nicht höhenbalanciert.***
- ***Die Höhe sollte höchstens 3 sein, damit auch der ganze Baum unter der 44 höhenbalanciert ist.***
- ***Betrachte Knoten 78, Kind 50, Enkel 62!***

Einfügen





Neuer Baum!

- ***Höhenbalanciert***
- ***Nur lokale Umsetzung der Knoten 78, 50, 62***
- ***Vorher drei Knoten untereinander, jetzt der mittlere über zwei anderen.***
- ***„Rotation“***

Algorithmus 4.9

INPUT:	Knoten x eines binären Suchbaumes T, Vaterknoten y, Großvaterknoten z
OUTPUT:	Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

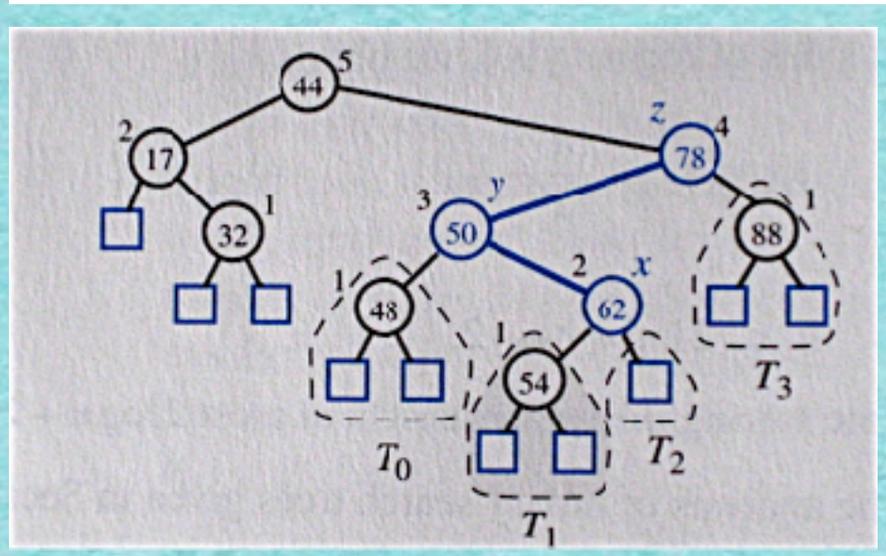
RESTRUCTURE(x)

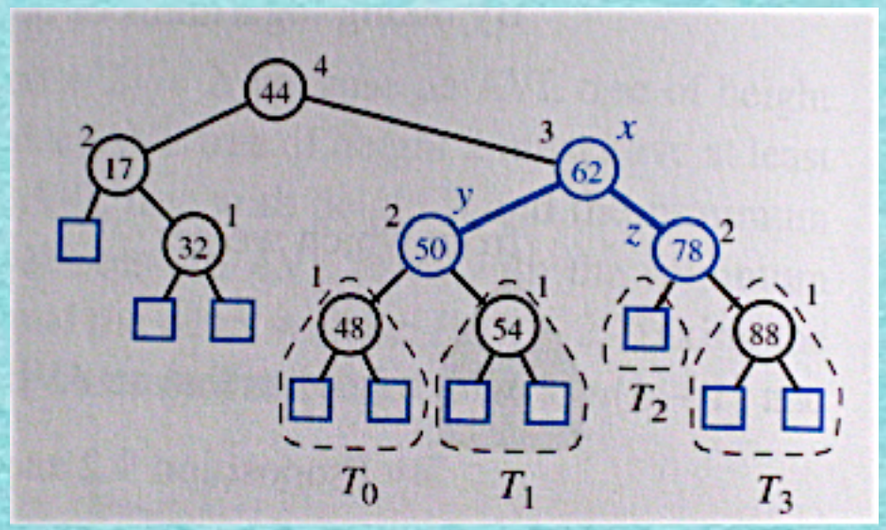
1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z;
   seien (T_0, T_1, T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z, die nicht Wurzeln x, y, z haben

2. Ersetze den Teilbaum mit Wurzel z durch einen neuen Teilbaum mit Wurzel b.

3. Setze a als linkes Kind von b, mit T_0 und T_1 als linken und rechten Teilbaum unter a;
   setze c als rechtes Kind von b, mit T_2 und T_3 als linken und rechten Teilbaum unter c.

4. RETURN



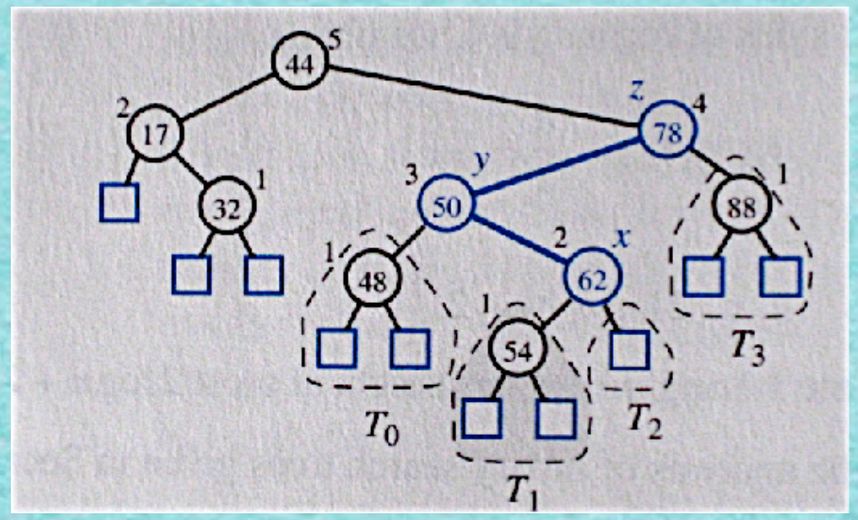


Satz 4.10

Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist O(1).

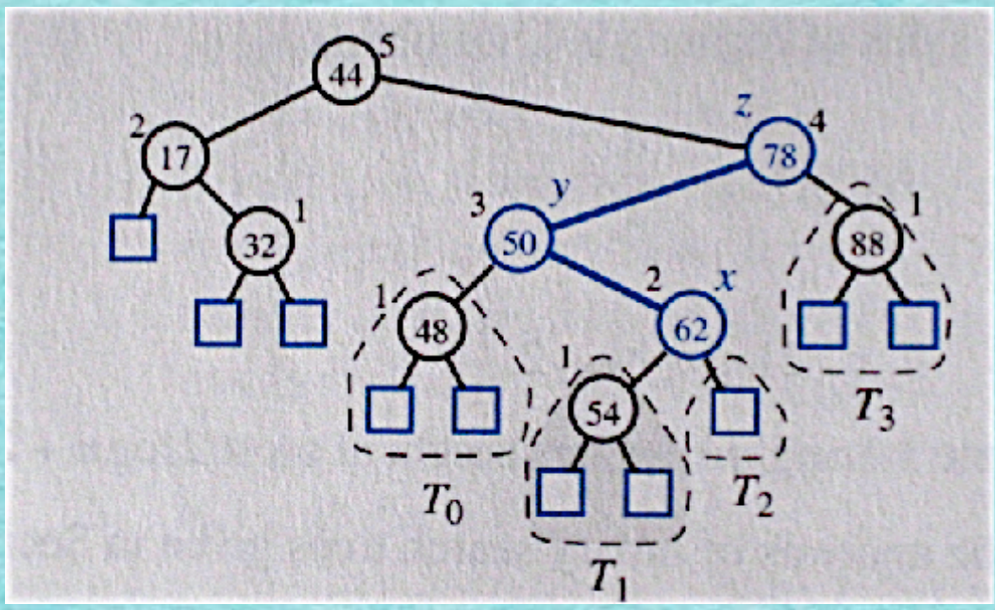
Beweis:

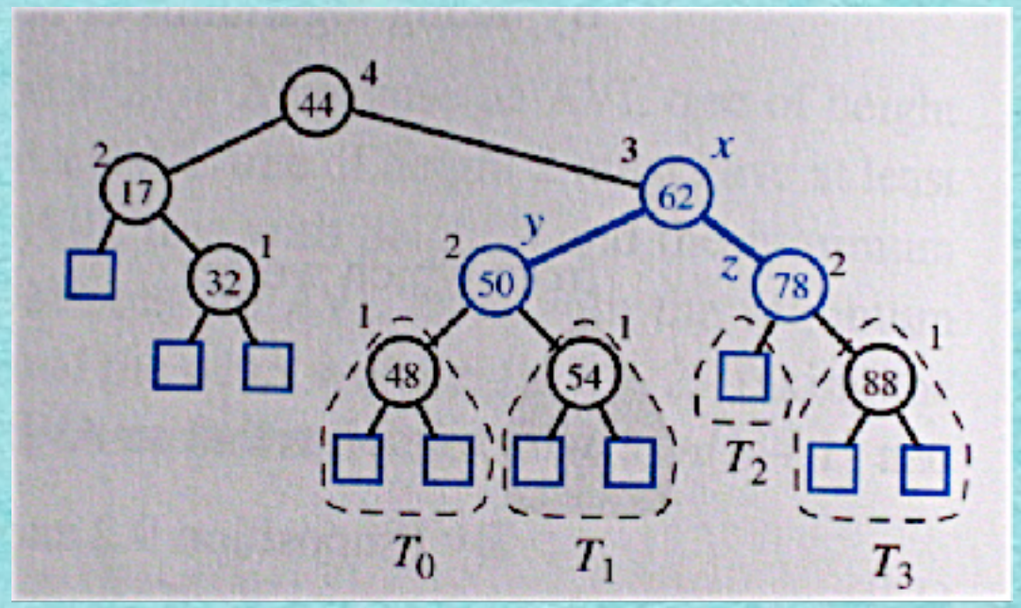
Angenommen, durch Hinzufügen eines Knotens v ist der Baum unbalanciert geworden.
Sei z der nach dem Einfügen niedrigste unbalancierte Vorfahre von v.
Sei y das Kind von z, das Vorfahre von v ist; y muss zwei höher sein als das andere Kind von z.
Sei x das Kind von y, das im selben Teilbaum wie v liegt.



Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Jetzt ersetzen wir die Teilstruktur z, y, x (3 Knoten untereinander) durch eine Teilstruktur mit 2 Knoten unter einem.
Z.z.: Danach ist der Baum ein AVL-Baum!



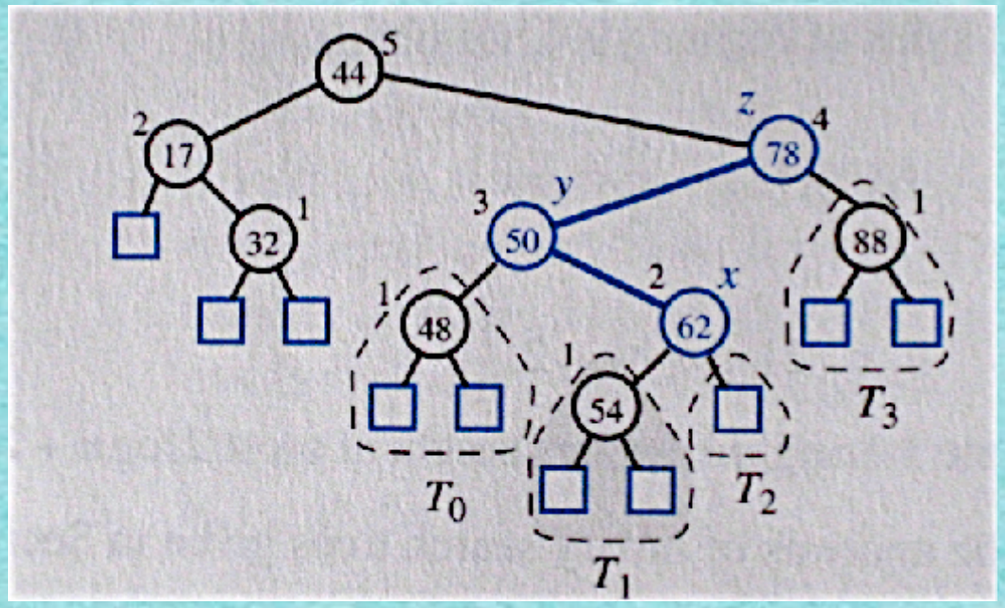


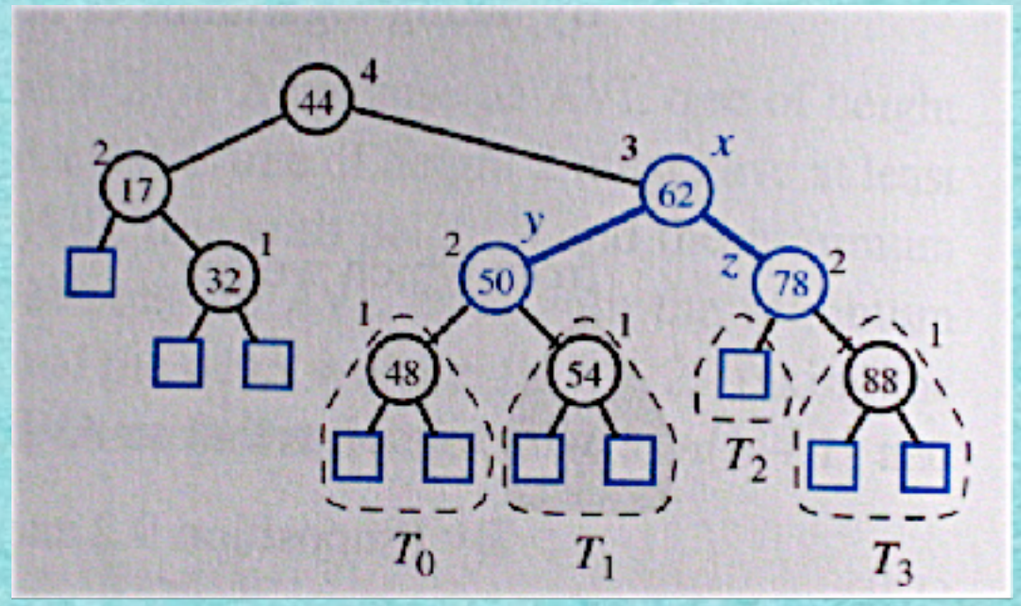
Betrachte jetzt die möglichen Anordnungen von x, y, z!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Welche Anordnungen gibt es?

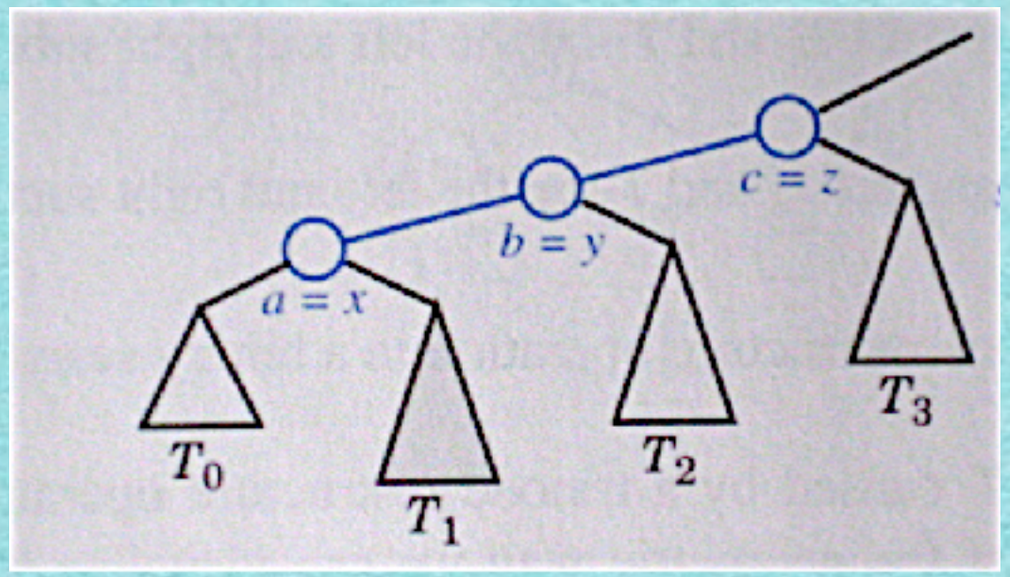
(1) $x \le y \le z$
(2) $x \le z \le y$
(3) $y \le x \le z$
(4) $y \le z \le x$
(5) $z \le x \le y$
(6) $z \le y \le x$

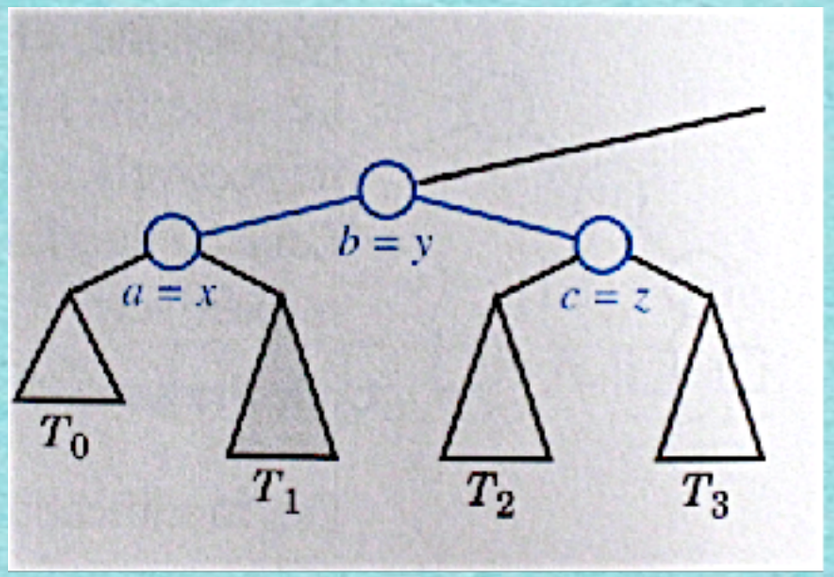




Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(1) $x \le y \le z$

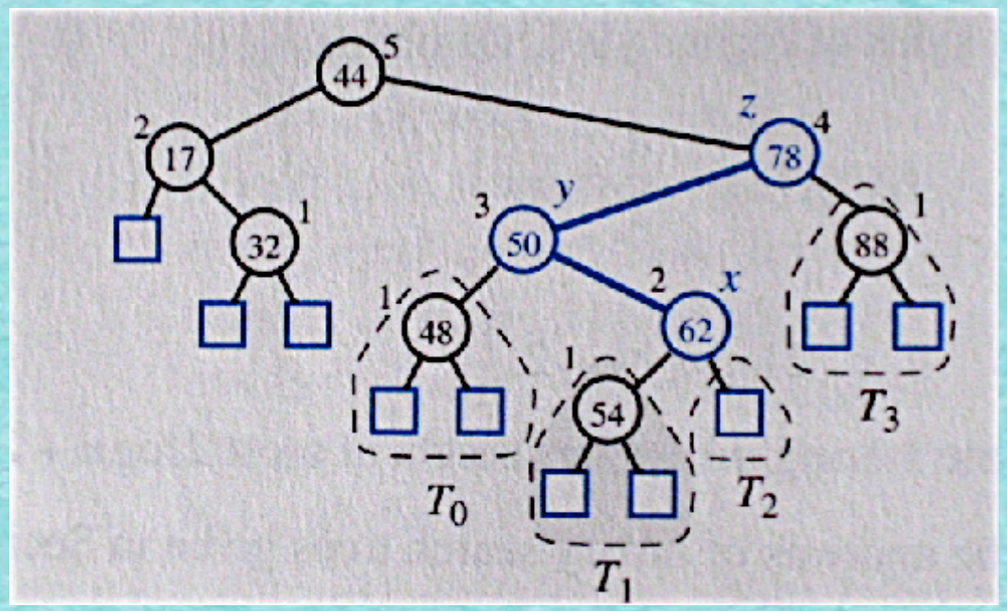




Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(2) $x \leq z \leq y$



Der Fall kann nicht auftreten!

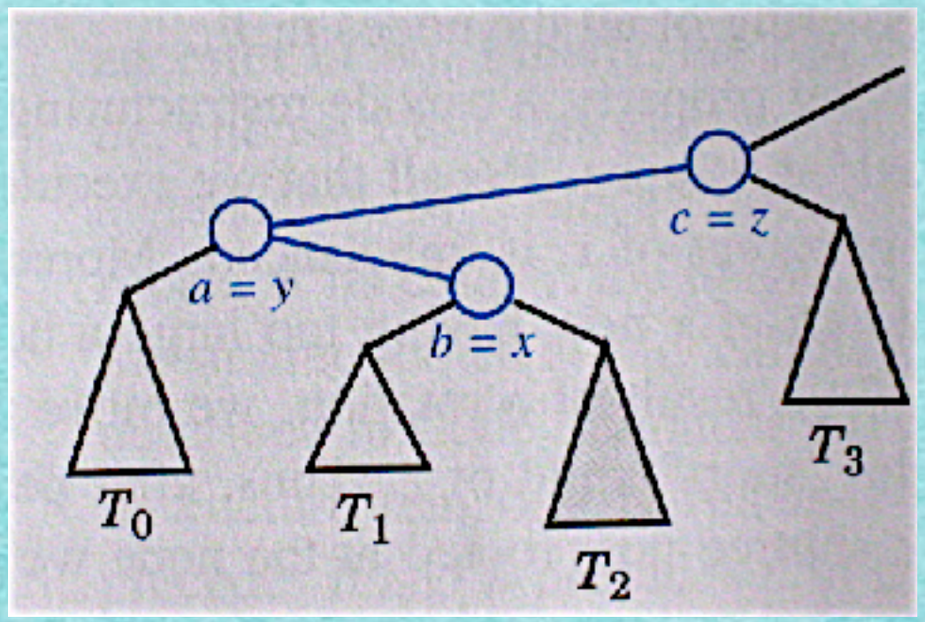
Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

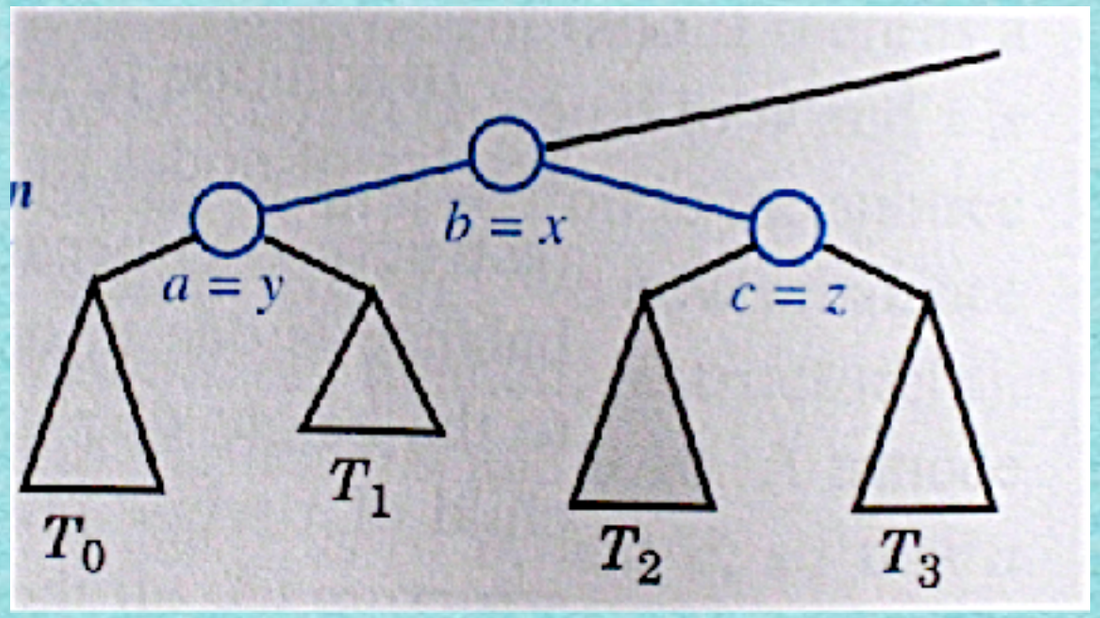
(2) $x \leq z \leq y$

Der Fall kann nicht auftreten!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(3) $y \le x \le z$

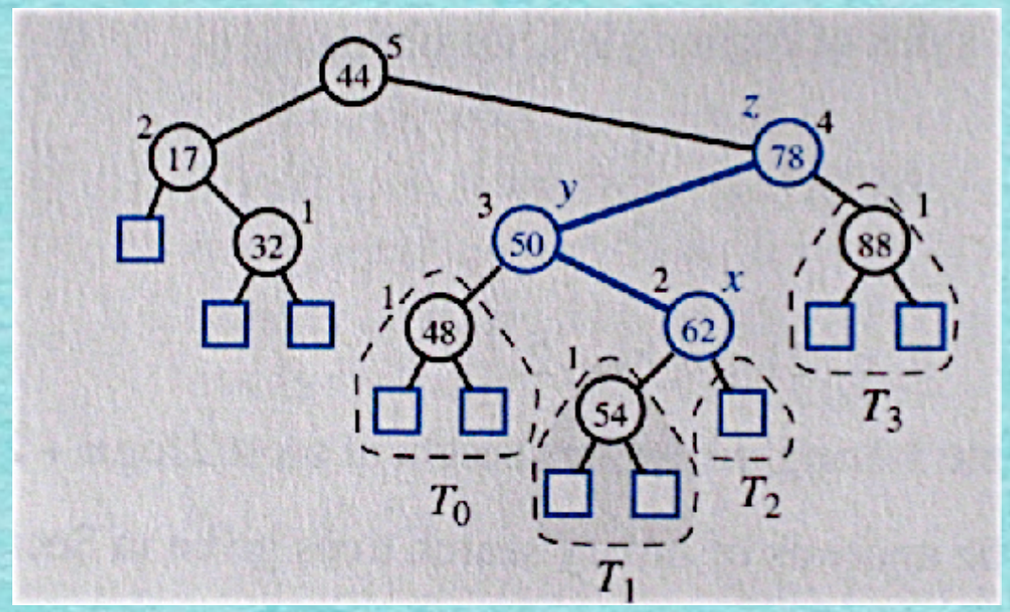




Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(4) $y \leq z \leq x$



Der Fall kann nicht auftreten!

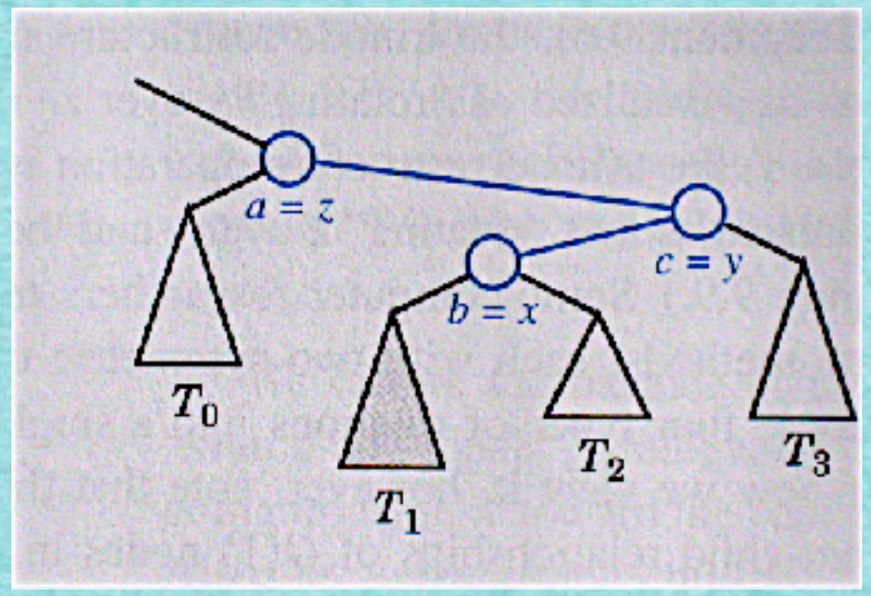
Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

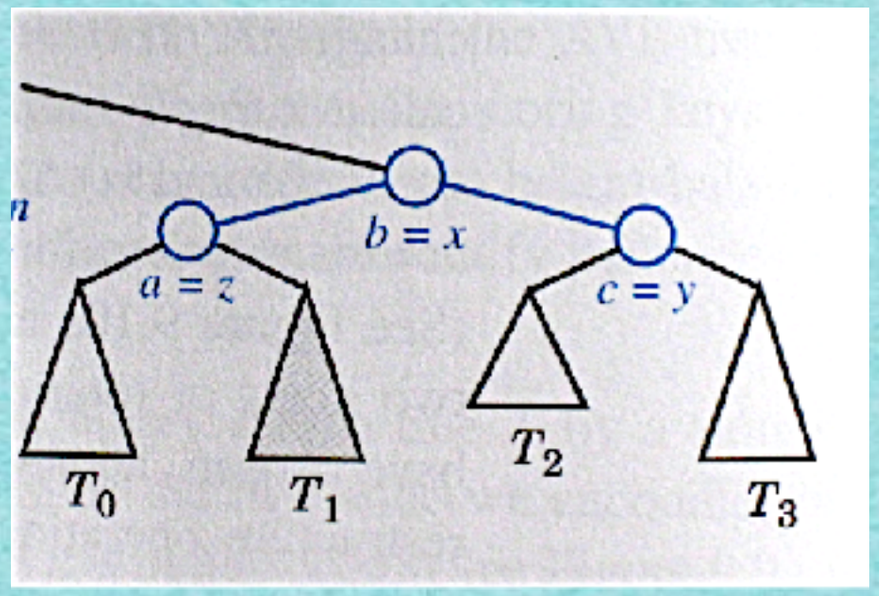
(4) $y \leq z \leq x$

Der Fall kann nicht auftreten!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(5) $z \leq x \leq y$

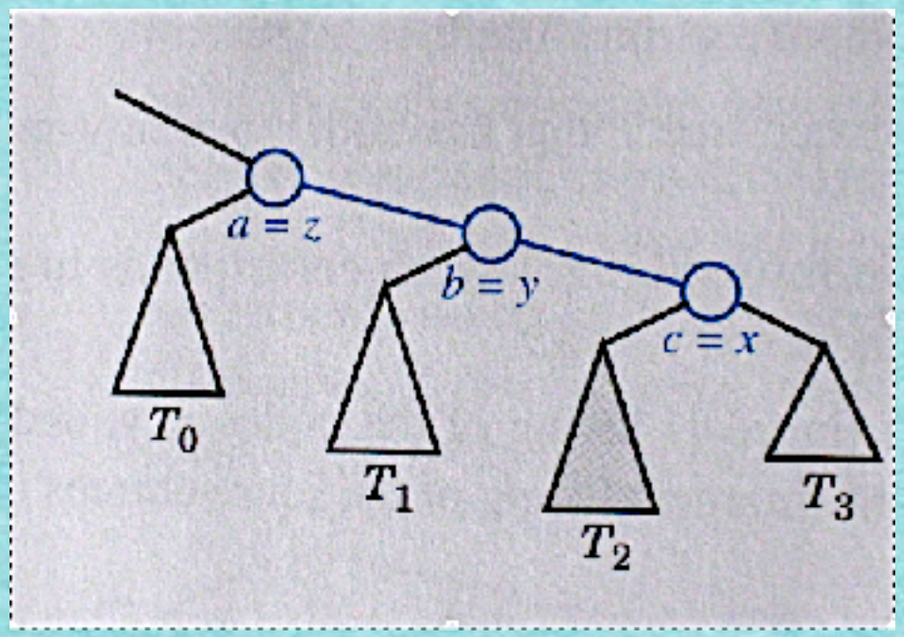


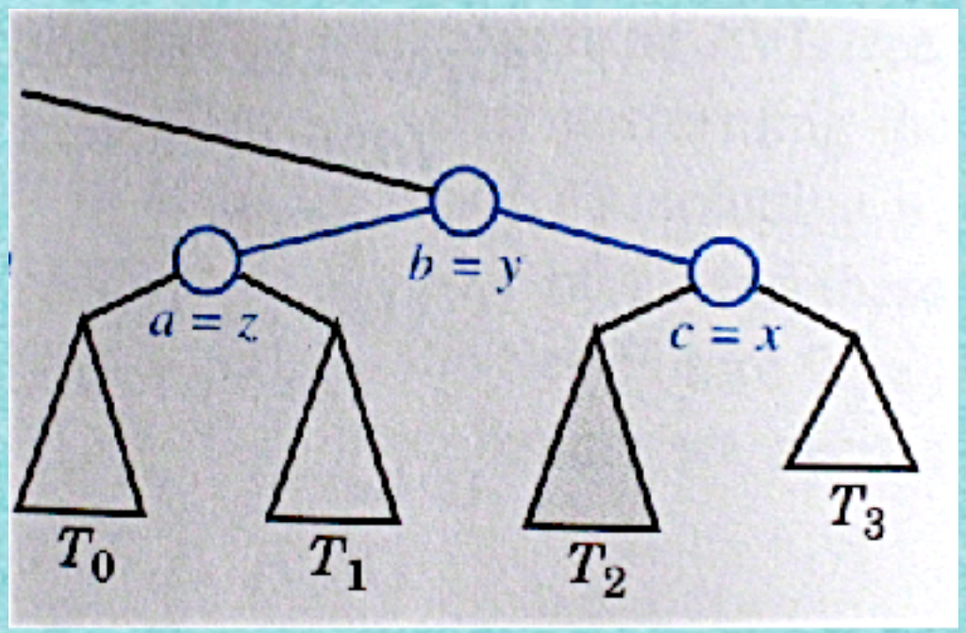


Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(6) $z \leq y \leq x$





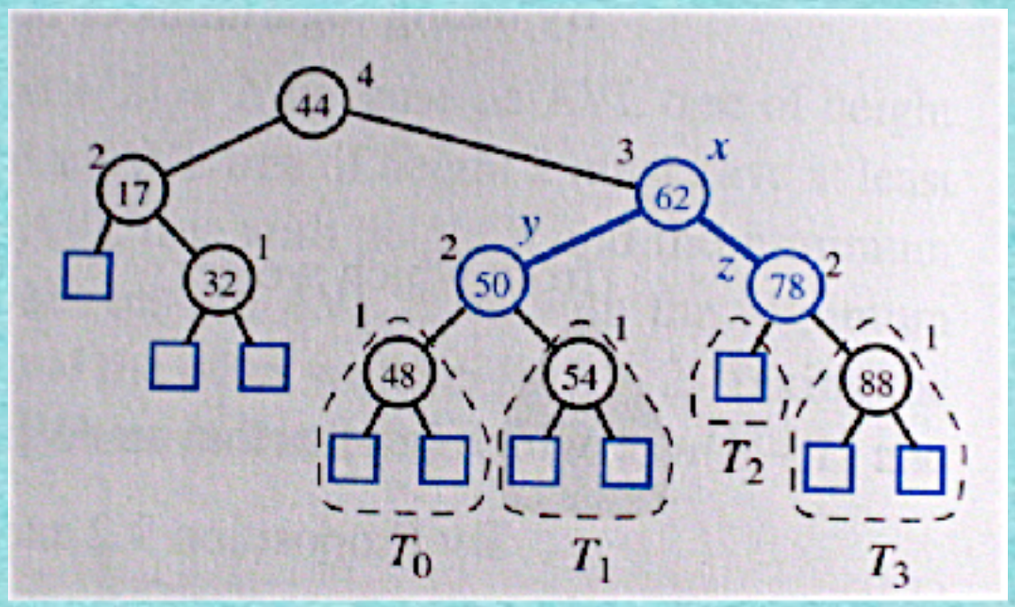
Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

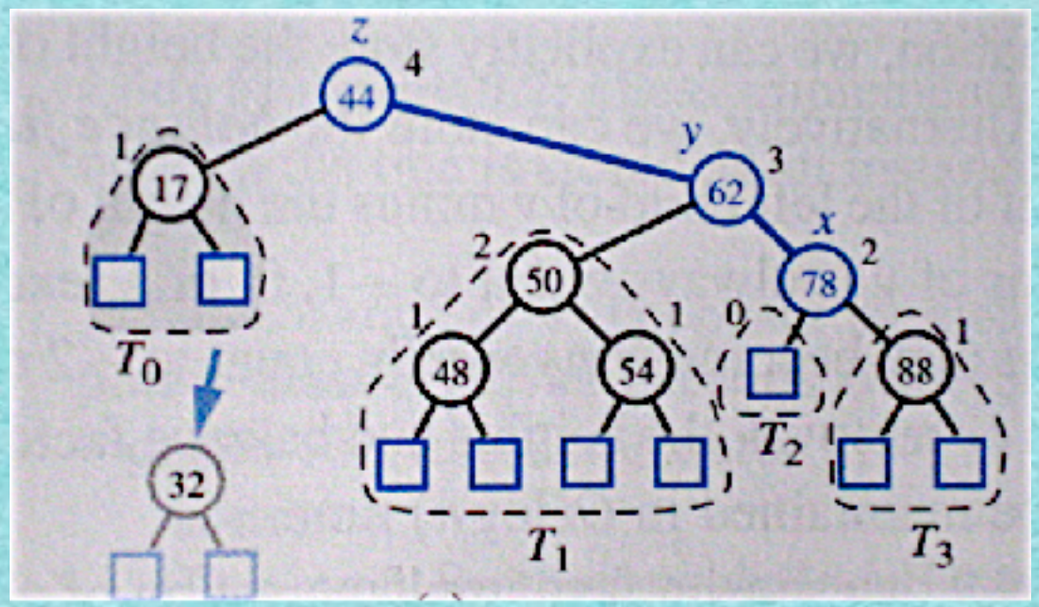
Alle Schritte erfordern nur konstant viele Rechenoperationen.

Löschen („DELETE“)

<u>Aufgabe:</u>

- ***Lösche 32!***

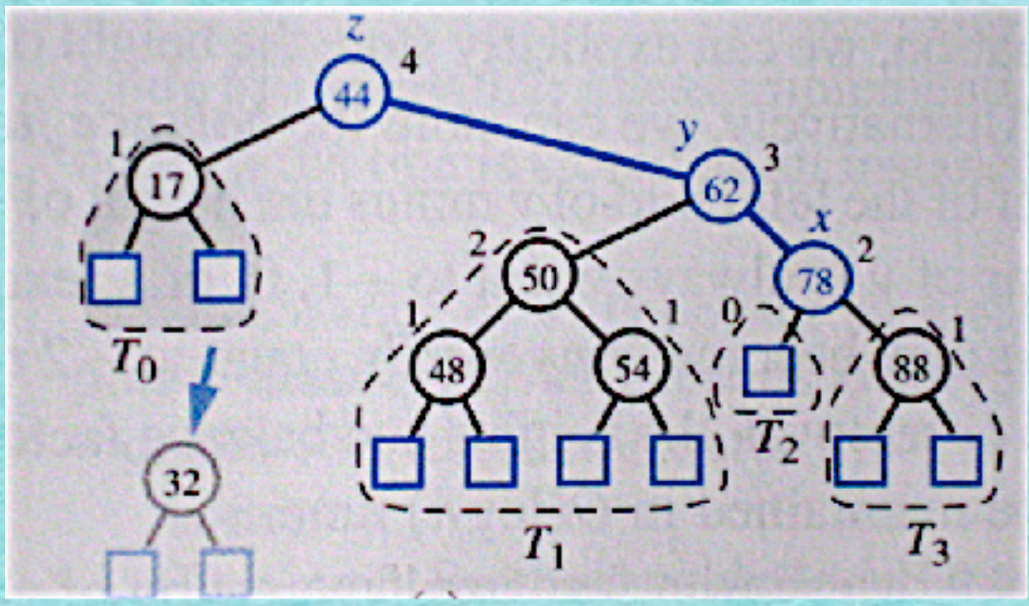


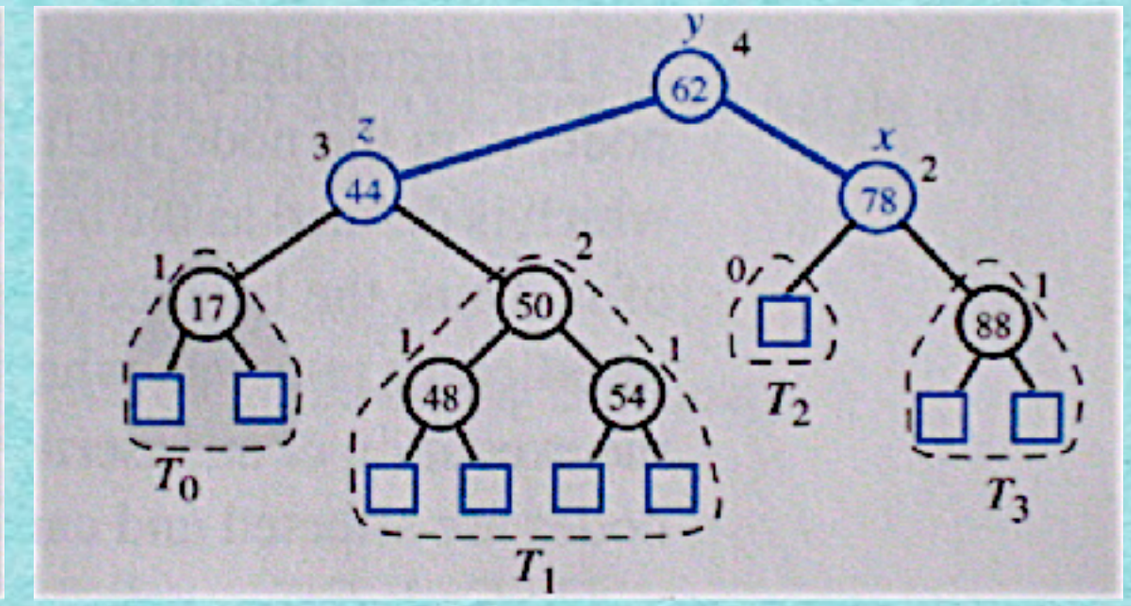


Löschen

Wieder:

- ***Verwende RESTRUCTURE!***





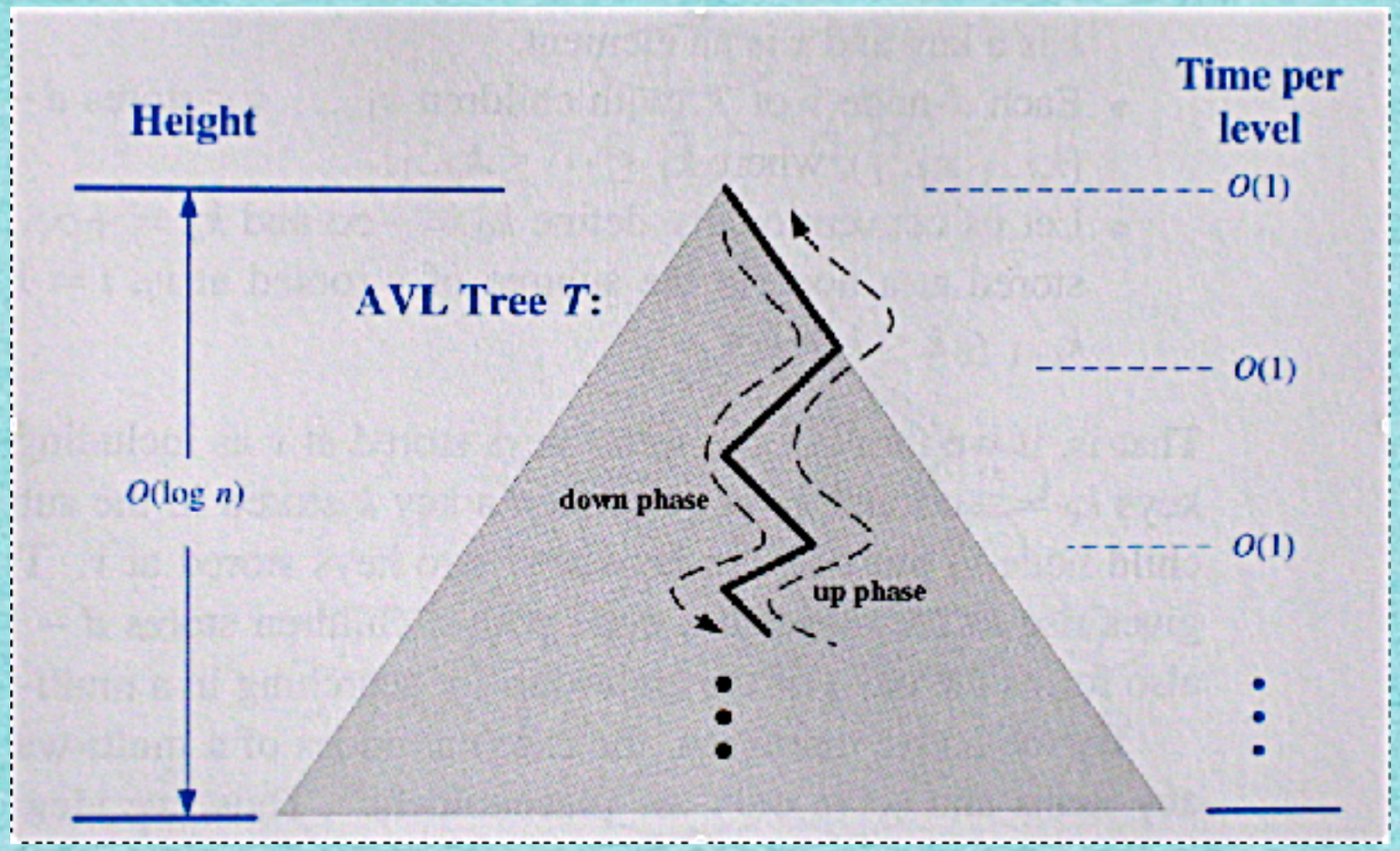
Das reicht in diesem Beispiel!

Allerdings kann im allgemeinen ein neues Problem auftauchen: Der neu höhenbalancierte Teilbaum von b kann niedriger sein als der vorher von z. Dadurch wird eventuell der Vater von z unbalanciert!

Löschen

Wieder:

- ***Verwende RESTRUCTURE!***
- ***Ggf. immer wieder…***



Höchstens O(log n) RESTRUCTURE-Operationen, jeweils in O(1)!

Löschen

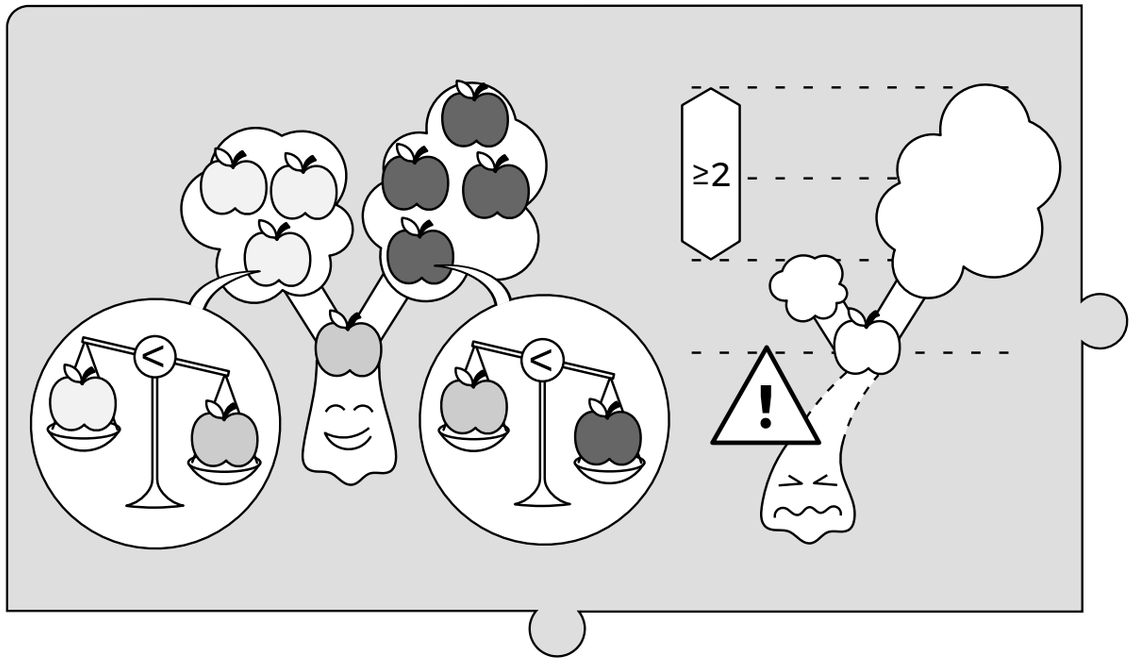
Satz 4.11

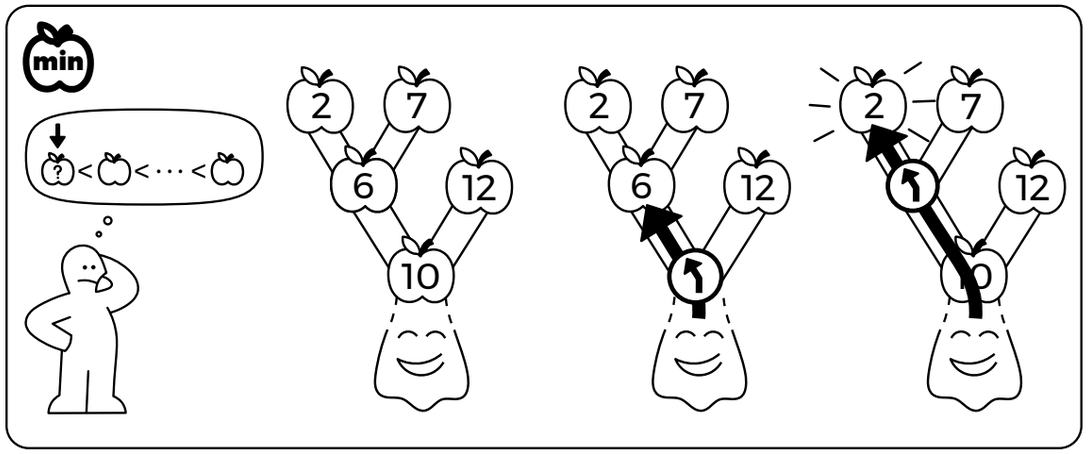
Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Lösch-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist O(log n).

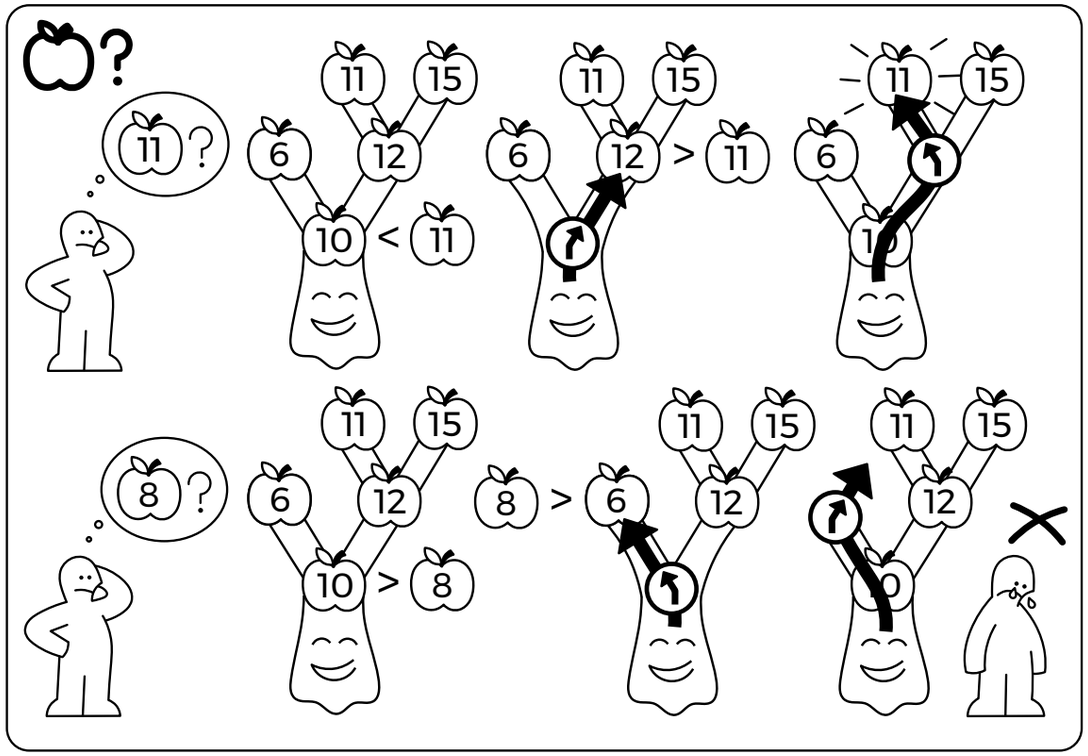
BÄLÄNCE TREE 1/2

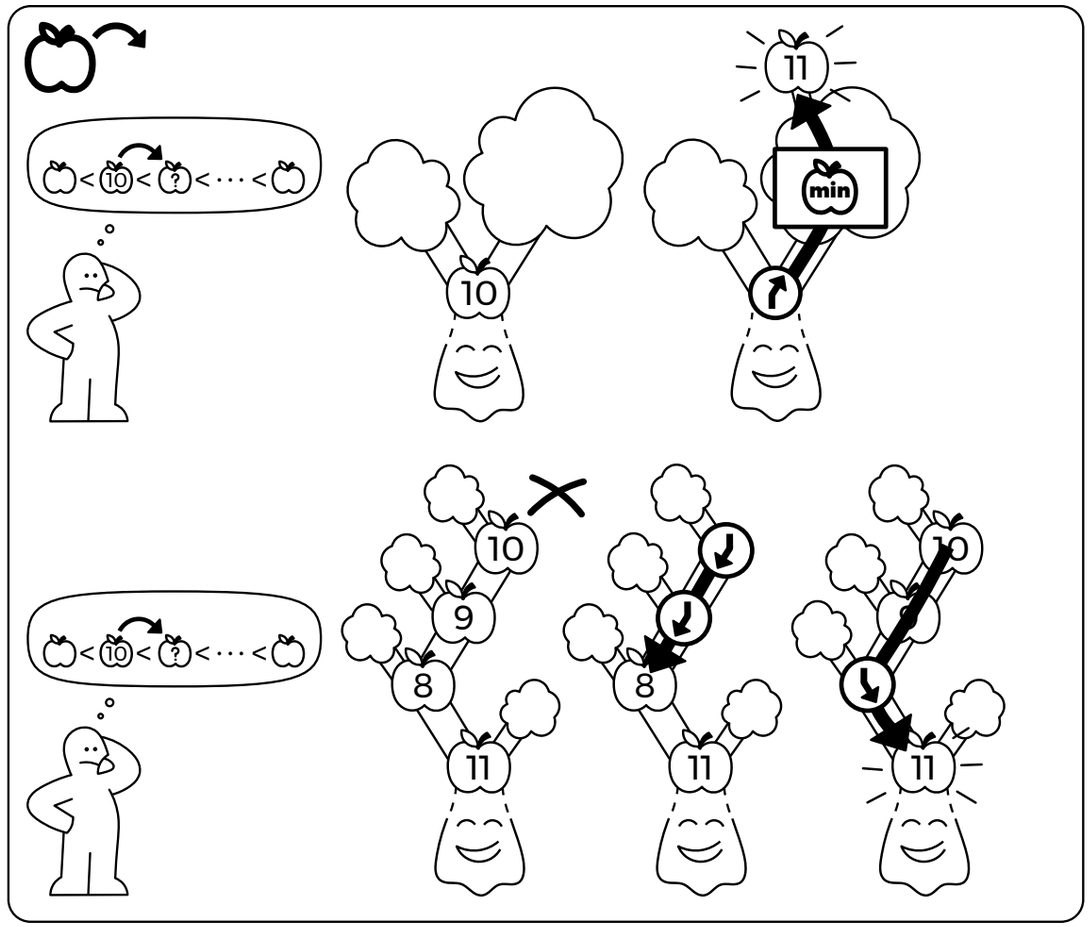
idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA



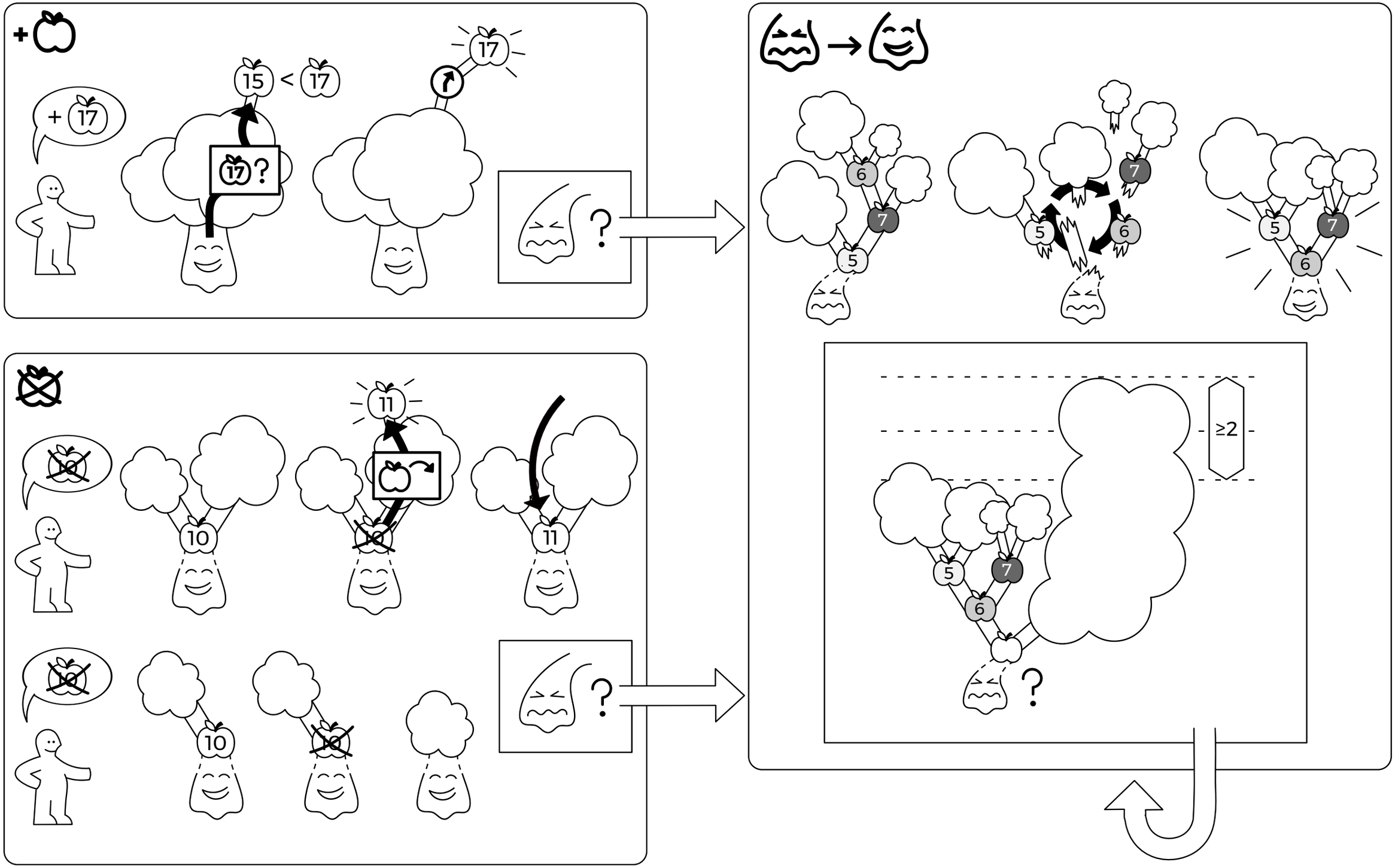






BÄLÄNCE TREE 2/2

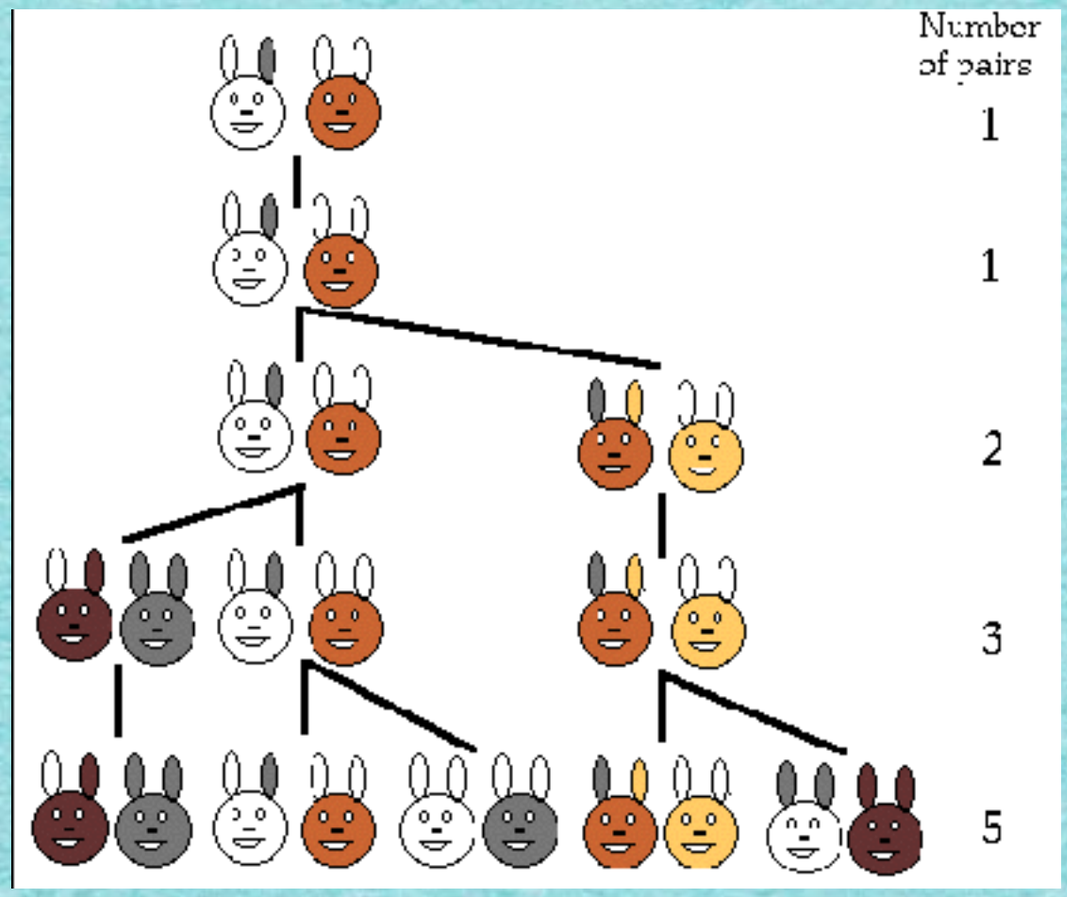
idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0



4.7 Fibonacci-Zahlen

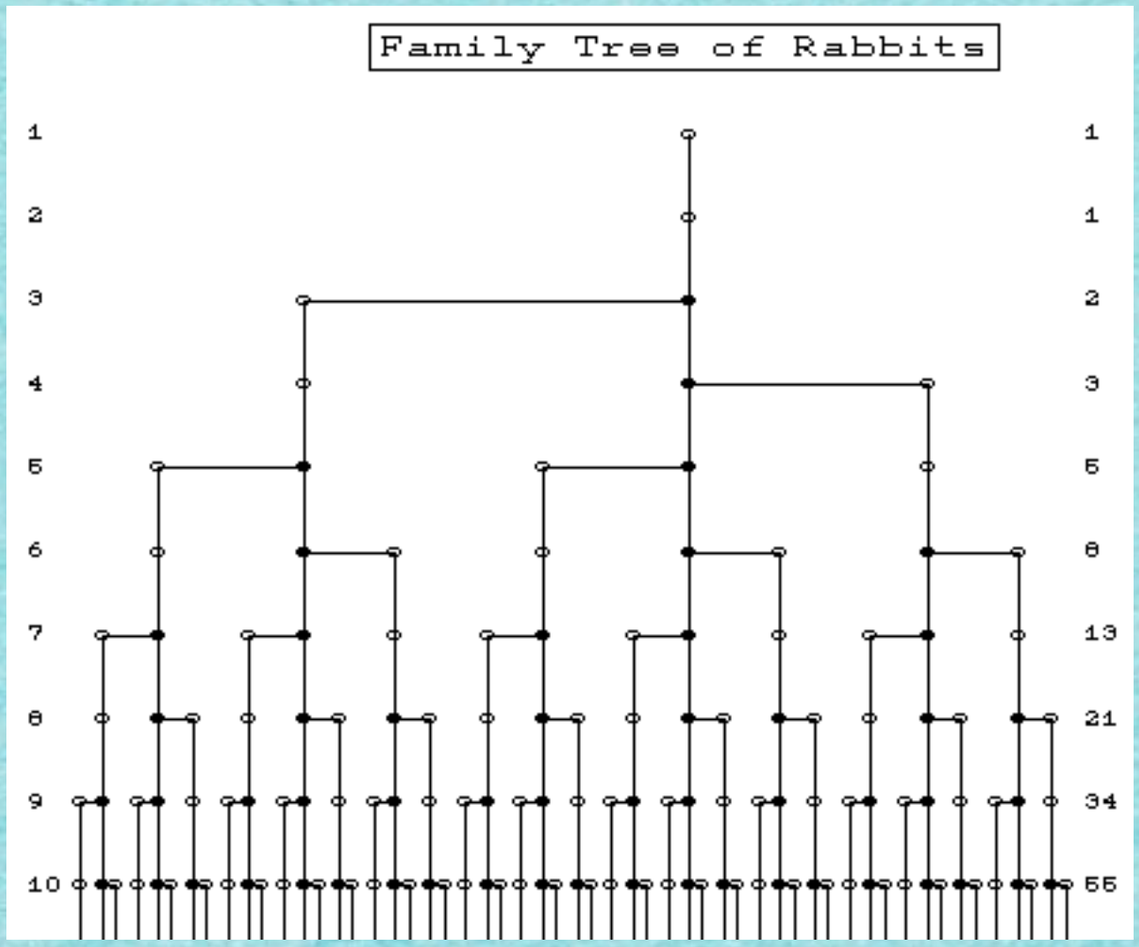
Leonardo da Pisa,
gen. Fibonacci
1180-1241

Fibonacci-Zahlen



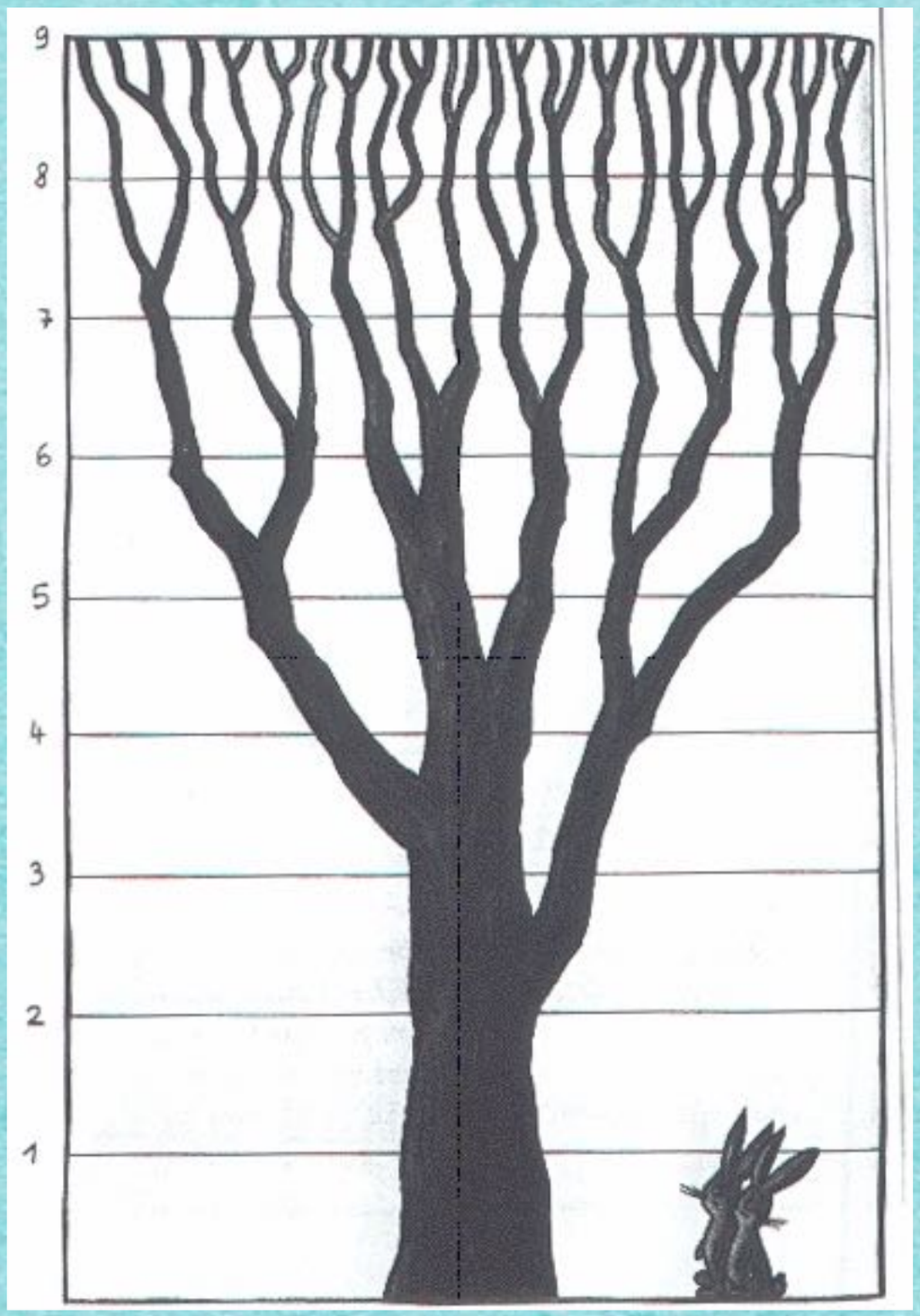
$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen

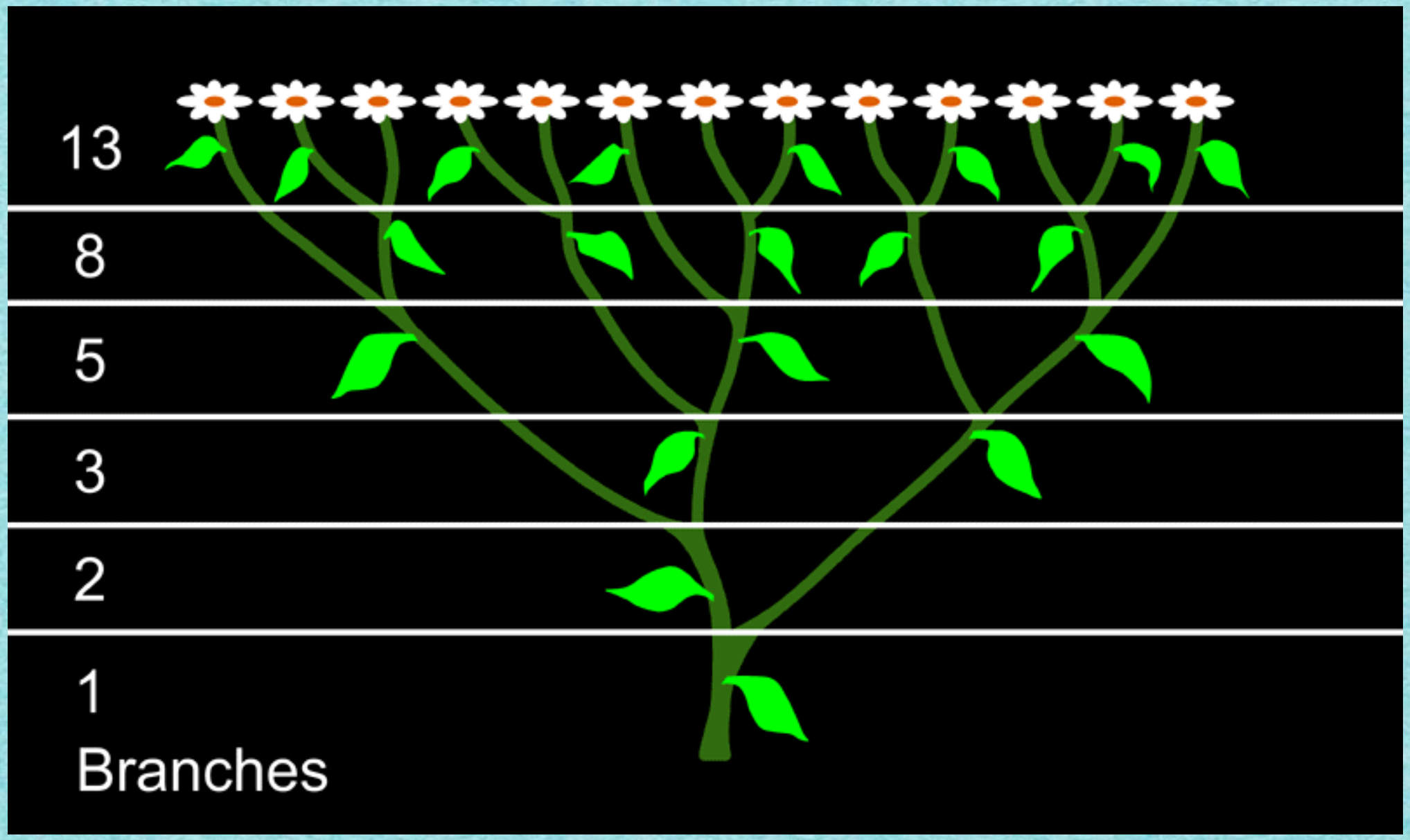


$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

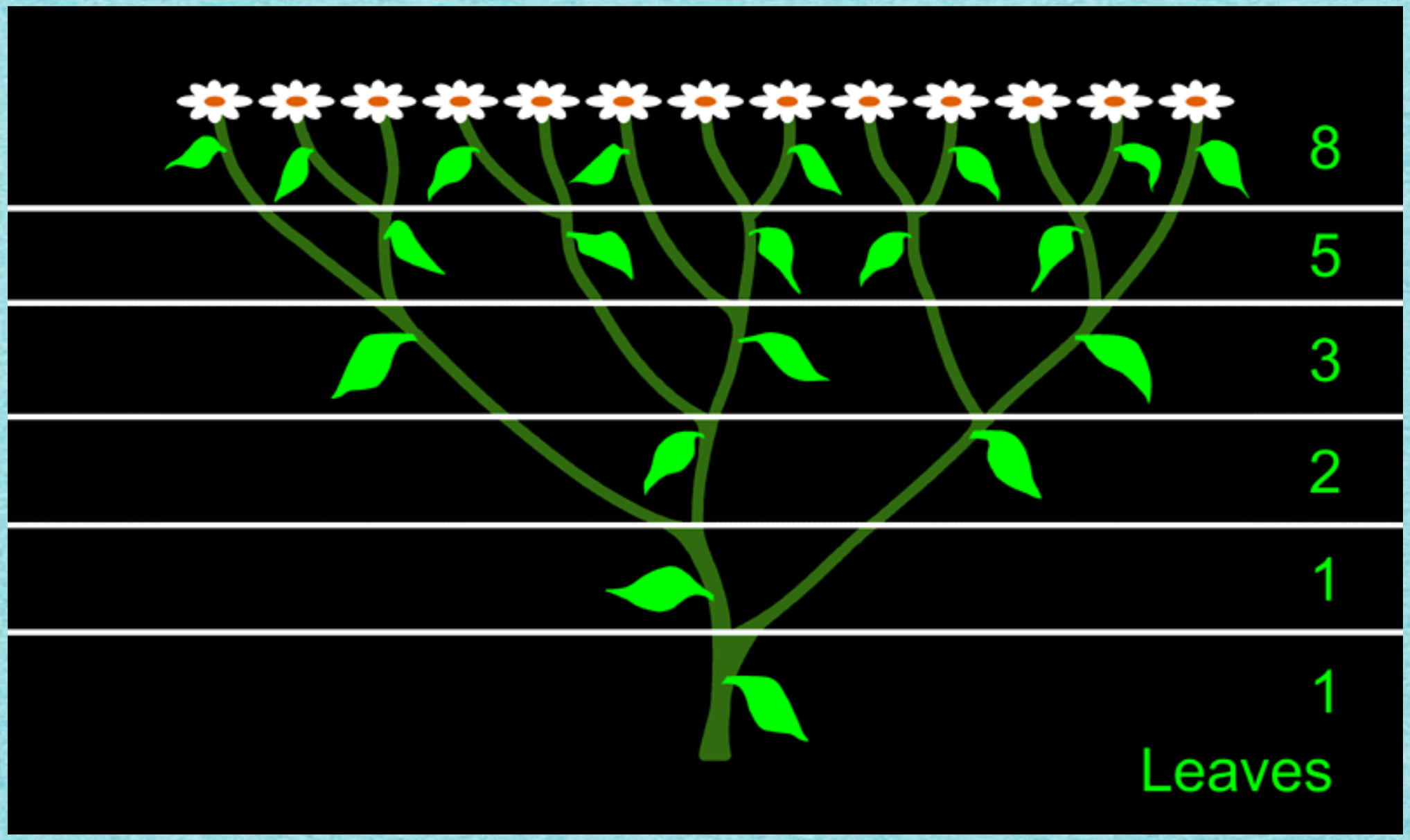
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

1

Fibonacci-Zahlen

2

Fibonacci-Zahlen

3

Fibonacci-Zahlen

5

Fibonacci-Zahlen

8

Fibonacci-Zahlen

1 3

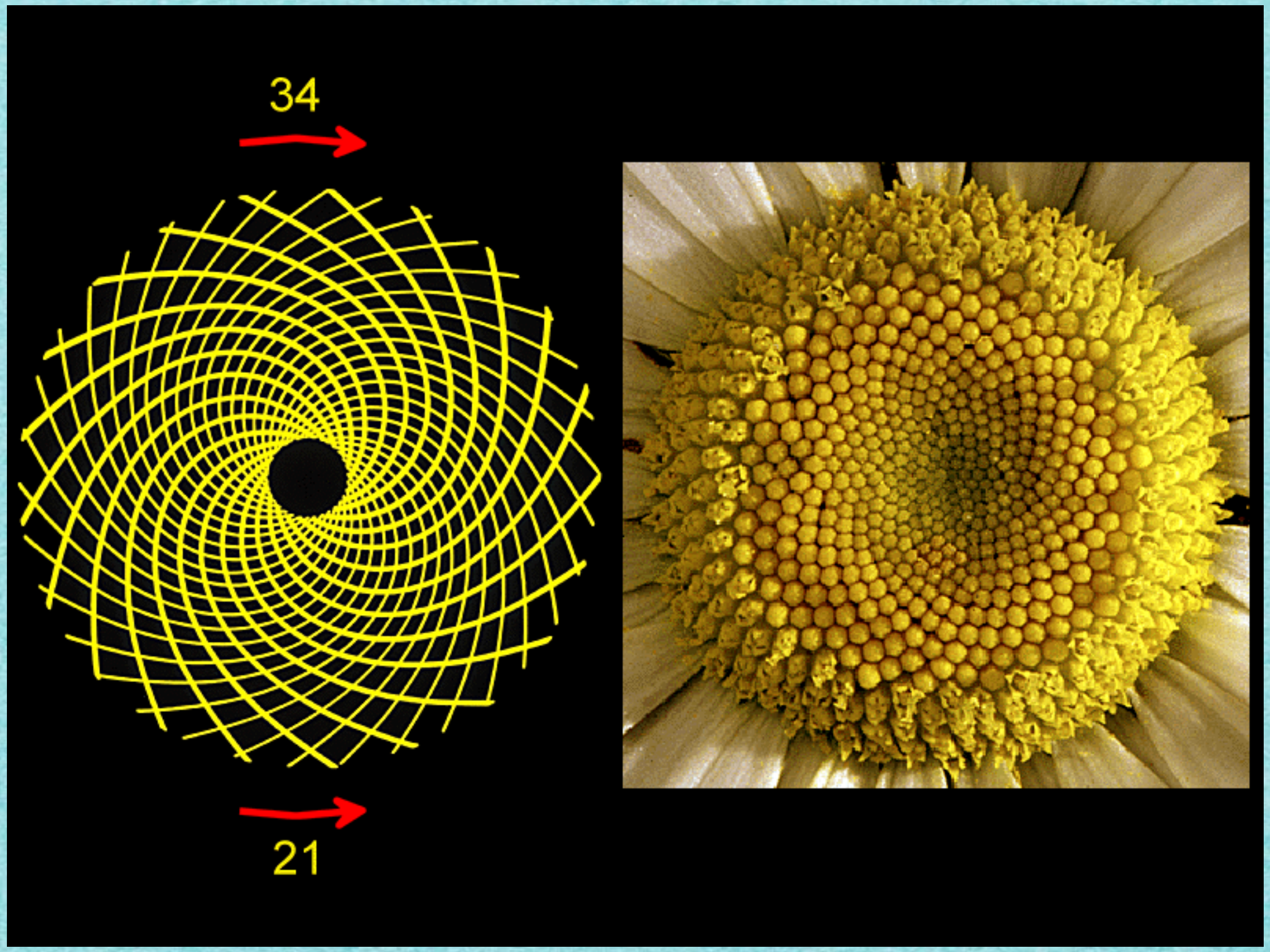
Fibonacci-Zahlen

21

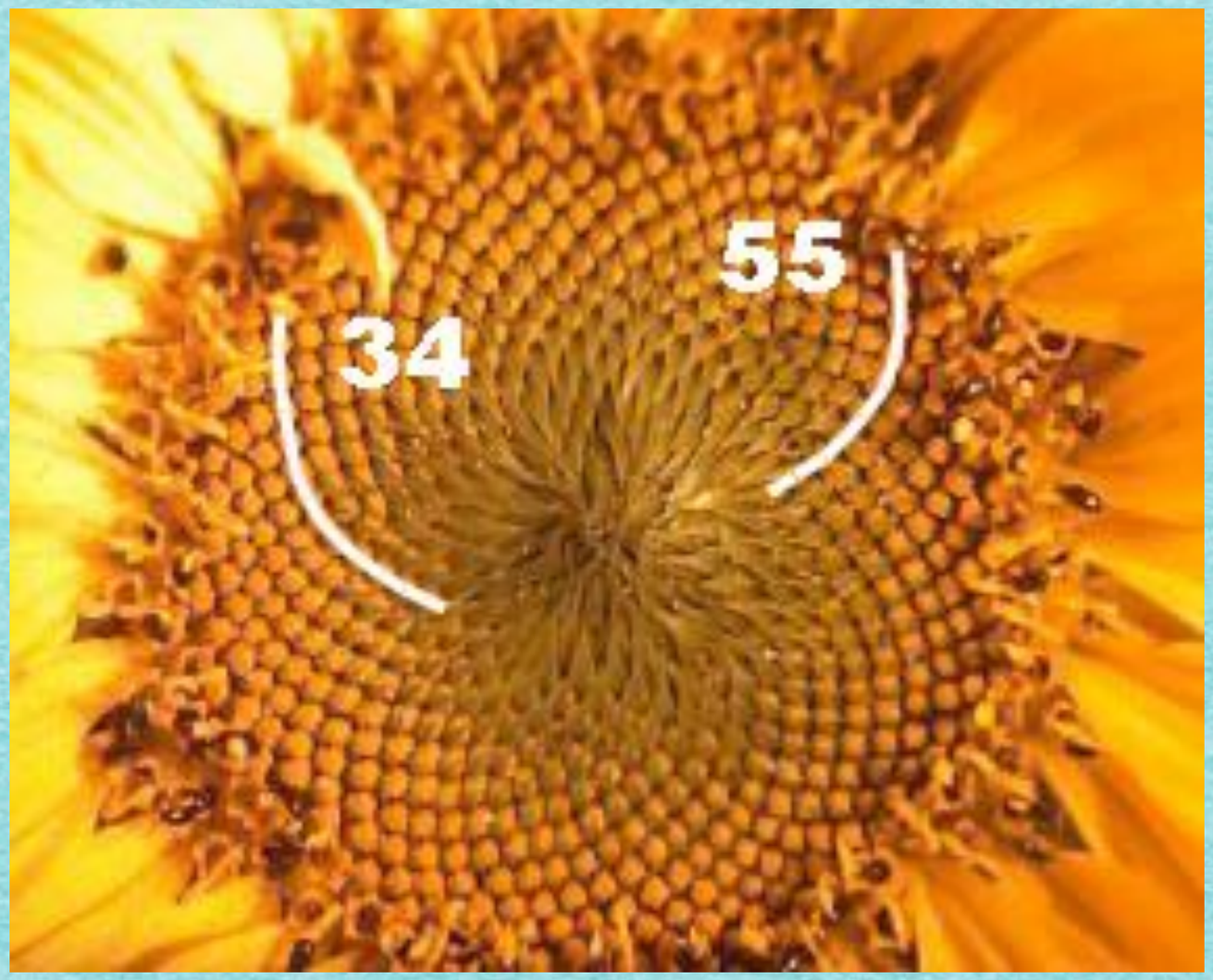
Fibonacci-Zahlen

34

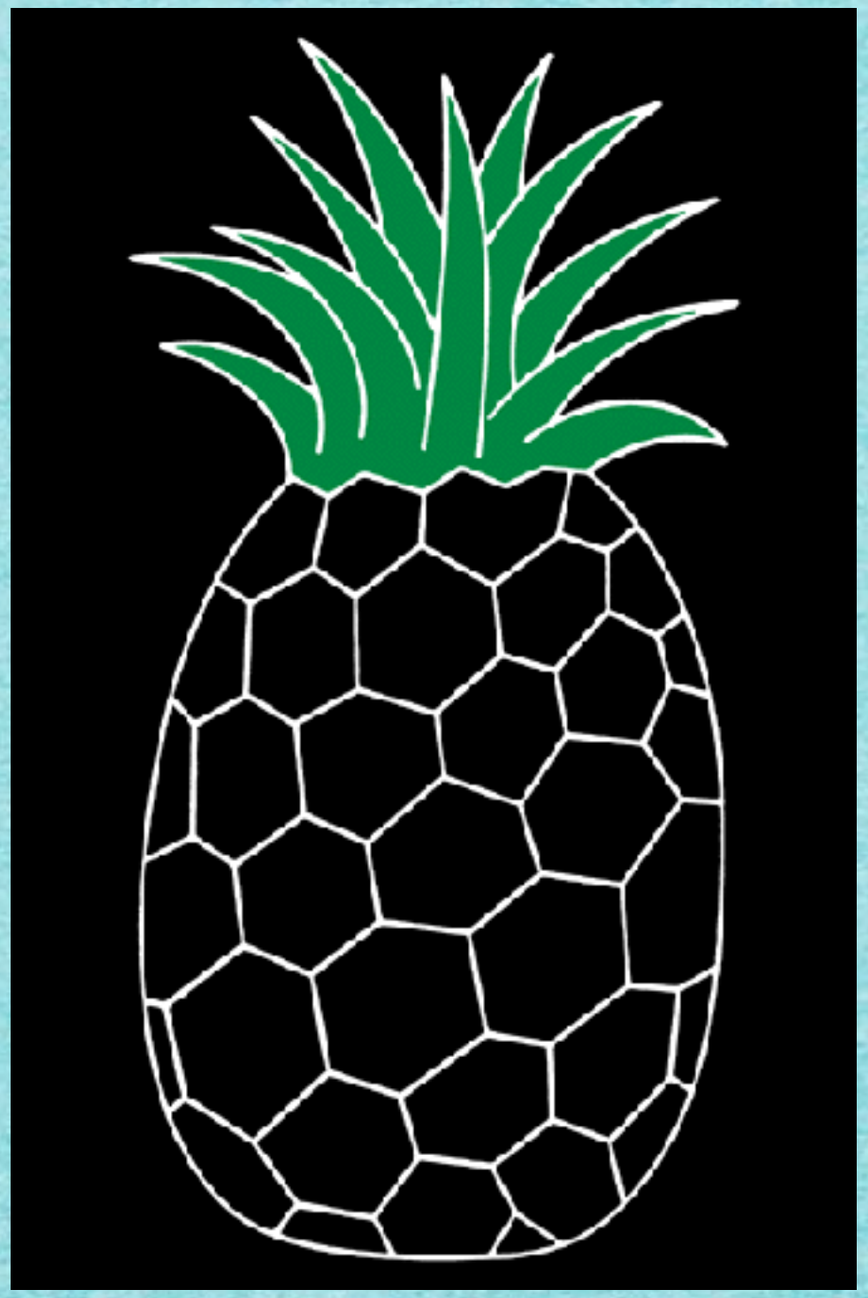
Fibonacci-Zahlen



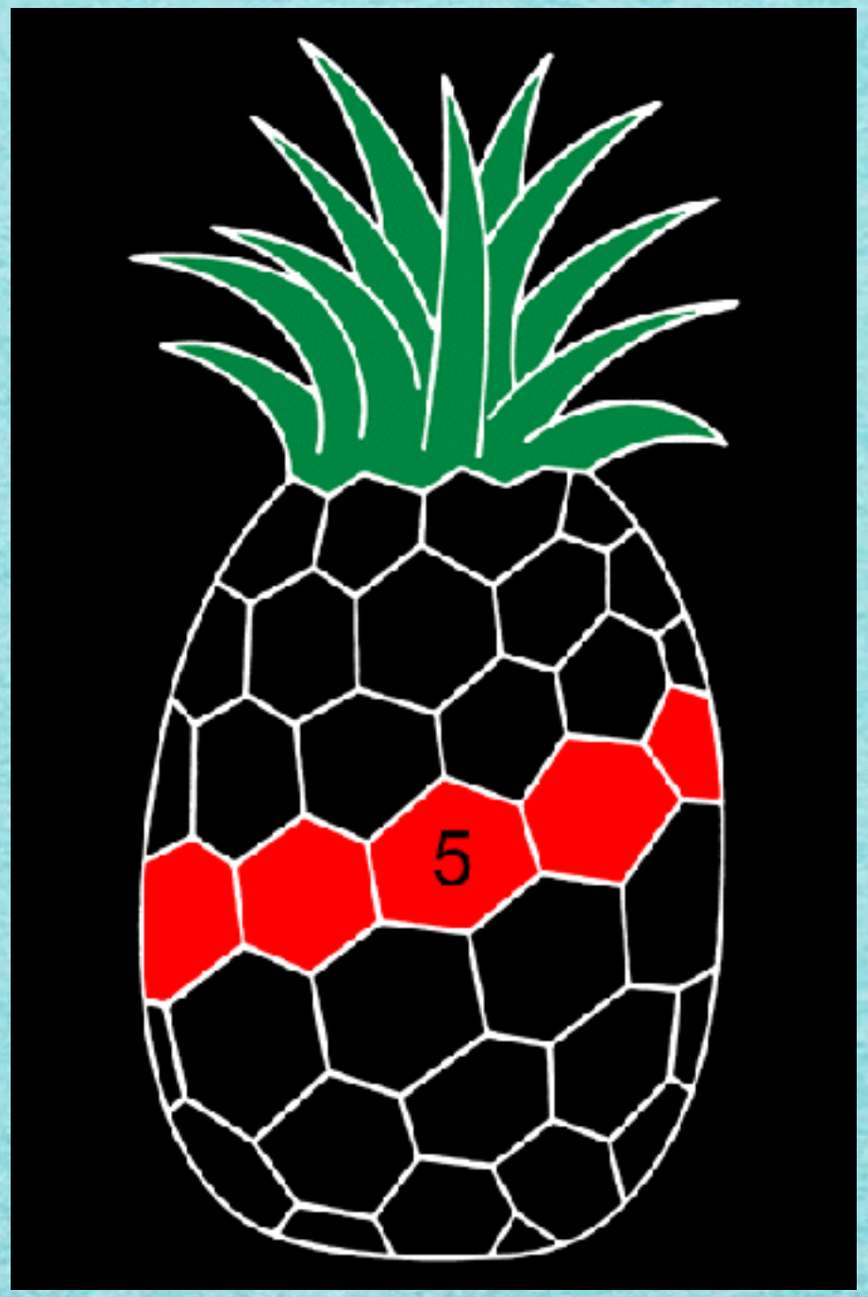
Fibonacci-Zahlen



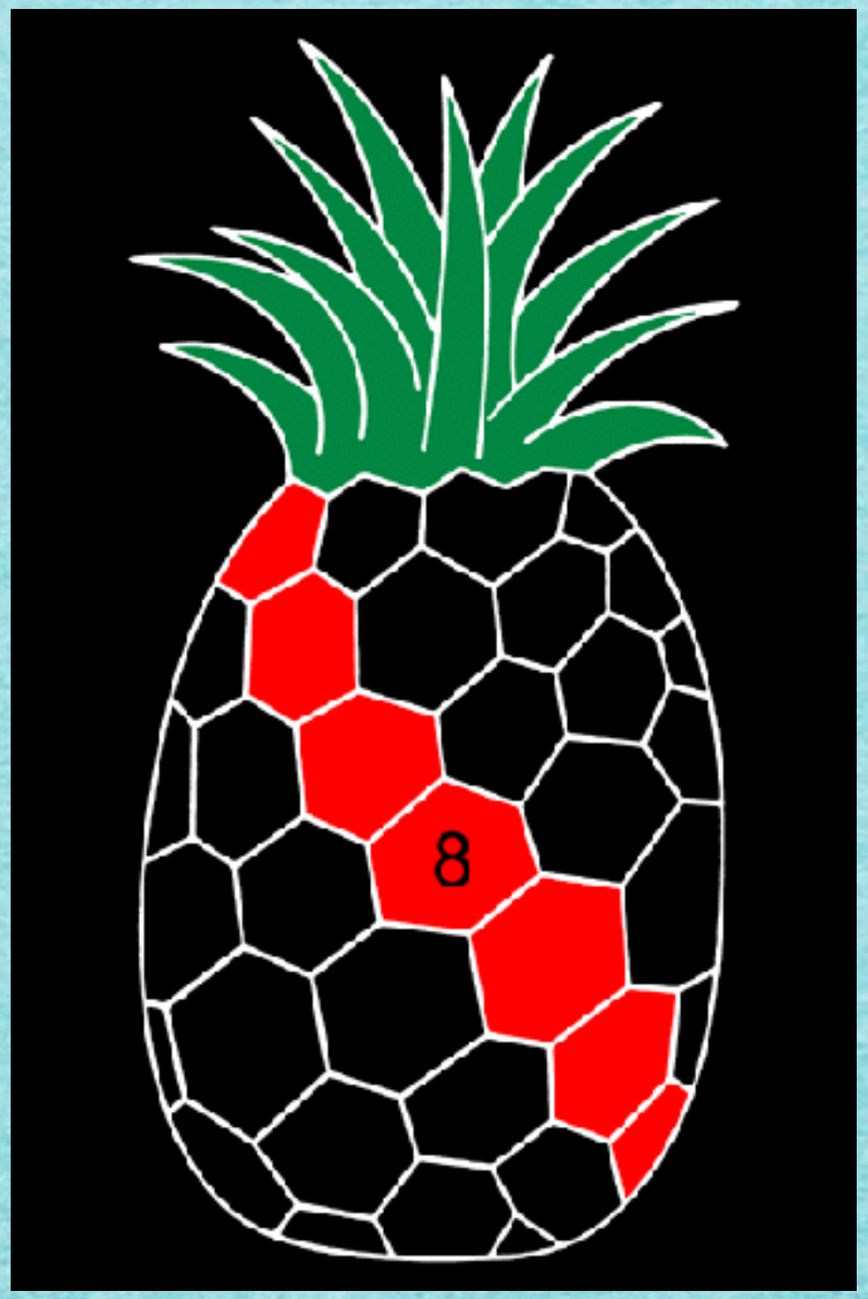
Fibonacci-Zahlen



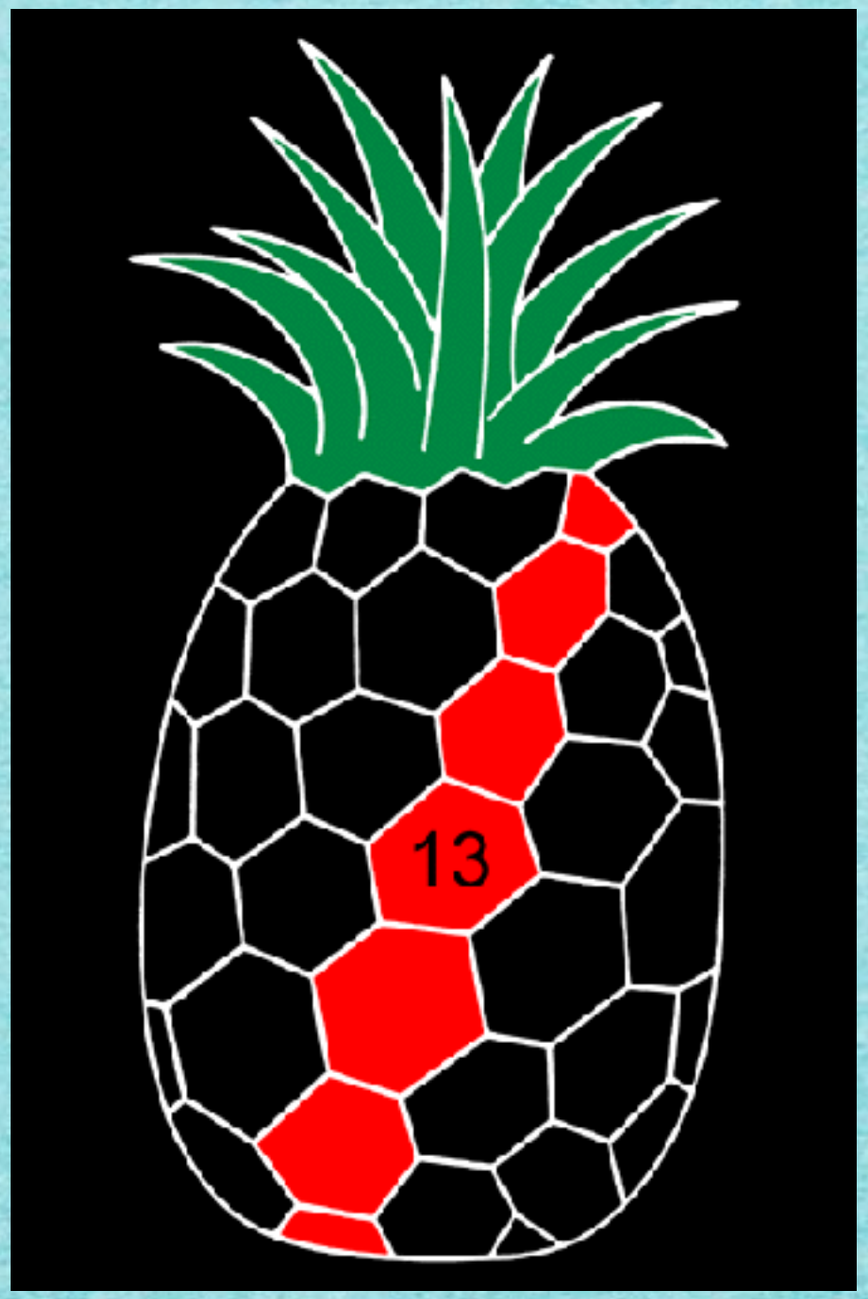
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

3:2=1.500

5:3=1.666

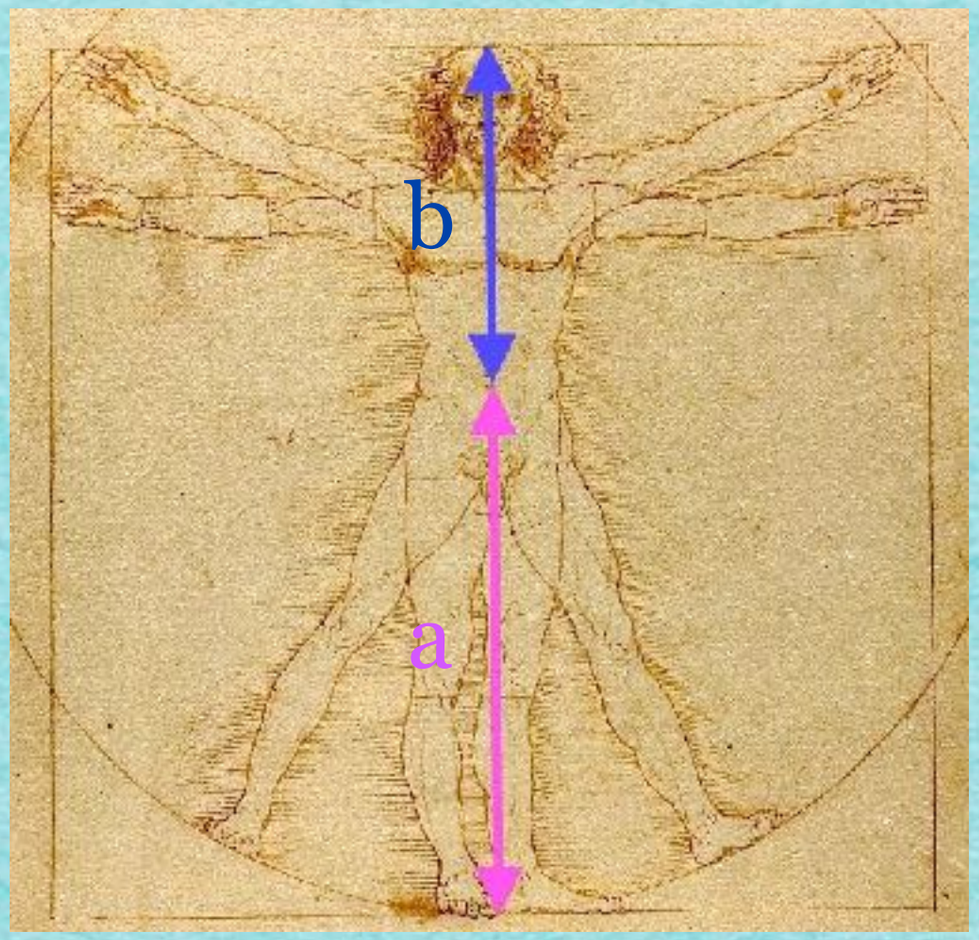
8:5=1.600

13:8=1.625

21:13=1.615

34:21=1.619

Fibonacci-Zahlen

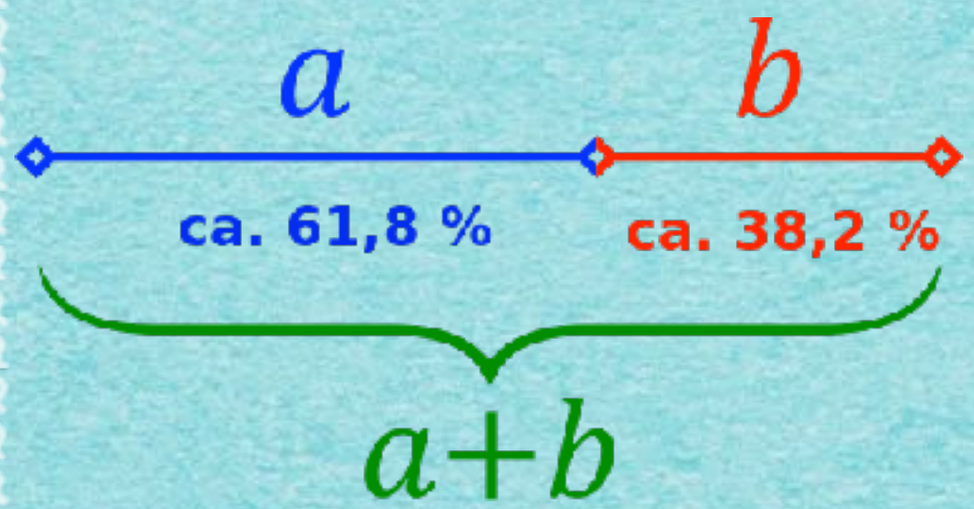


Goldener Schnitt:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Fibonacci-Zahlen

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$



Herleitung des Zahlenwertes [Bearbeiten]

Aus der oben angegebenen Definition

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

bzw.

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0$$

folgt mit $\Phi = \frac{a}{b}$ und $\frac{1}{\Phi} = \frac{b}{a}$

$$\Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} = 0\,.$$

Multiplikation mit Φ ergibt die quadratische Gleichung

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0\,.$$

Diese Gleichung hat genau die beiden Lösungen

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,033$$

und

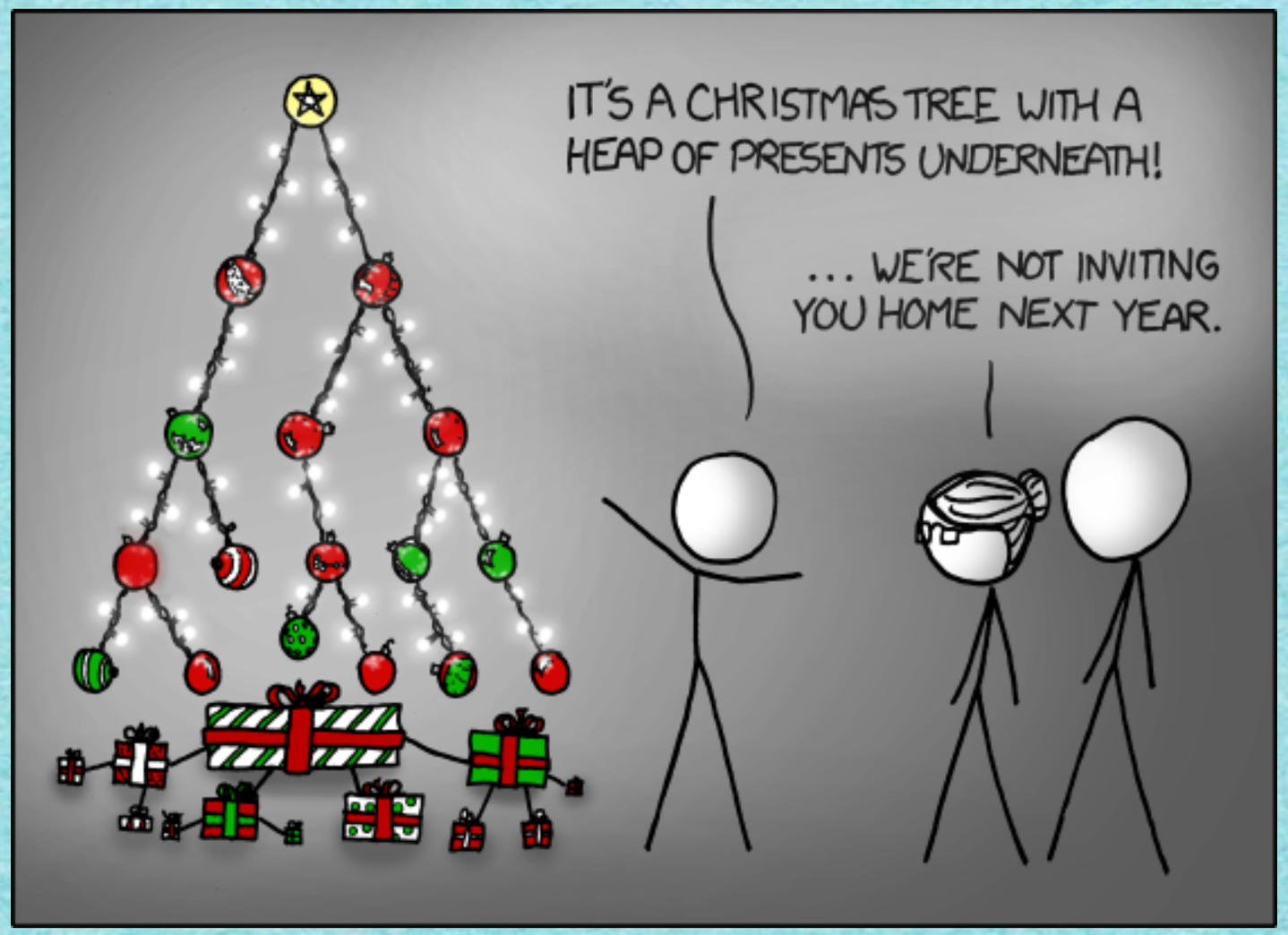
$$\bar{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi} \approx -0{,}618\,033\,.$$

Da $\bar{\Phi}$ negativ ist, ist Φ die gesuchte Goldene Zahl.

Aus diesen Betrachtungen folgt unmittelbar die interessante Beziehung:

$$\frac{1}{\Phi} + 1 = \Phi = \Phi^2 - 1$$

Zusammenfassung Kapitel 4!



Zusammenfassung Kapitel 4!

NIKOLAUS

Frohe Weihnachten!