Technische Universität Braunschweig

Institute of Operating Systems
and Computer Networks
Algorithms Group

Algorithmen und Datenstrukturen — Wintersemester 2017/2018
Übung#2, 09.11.2017

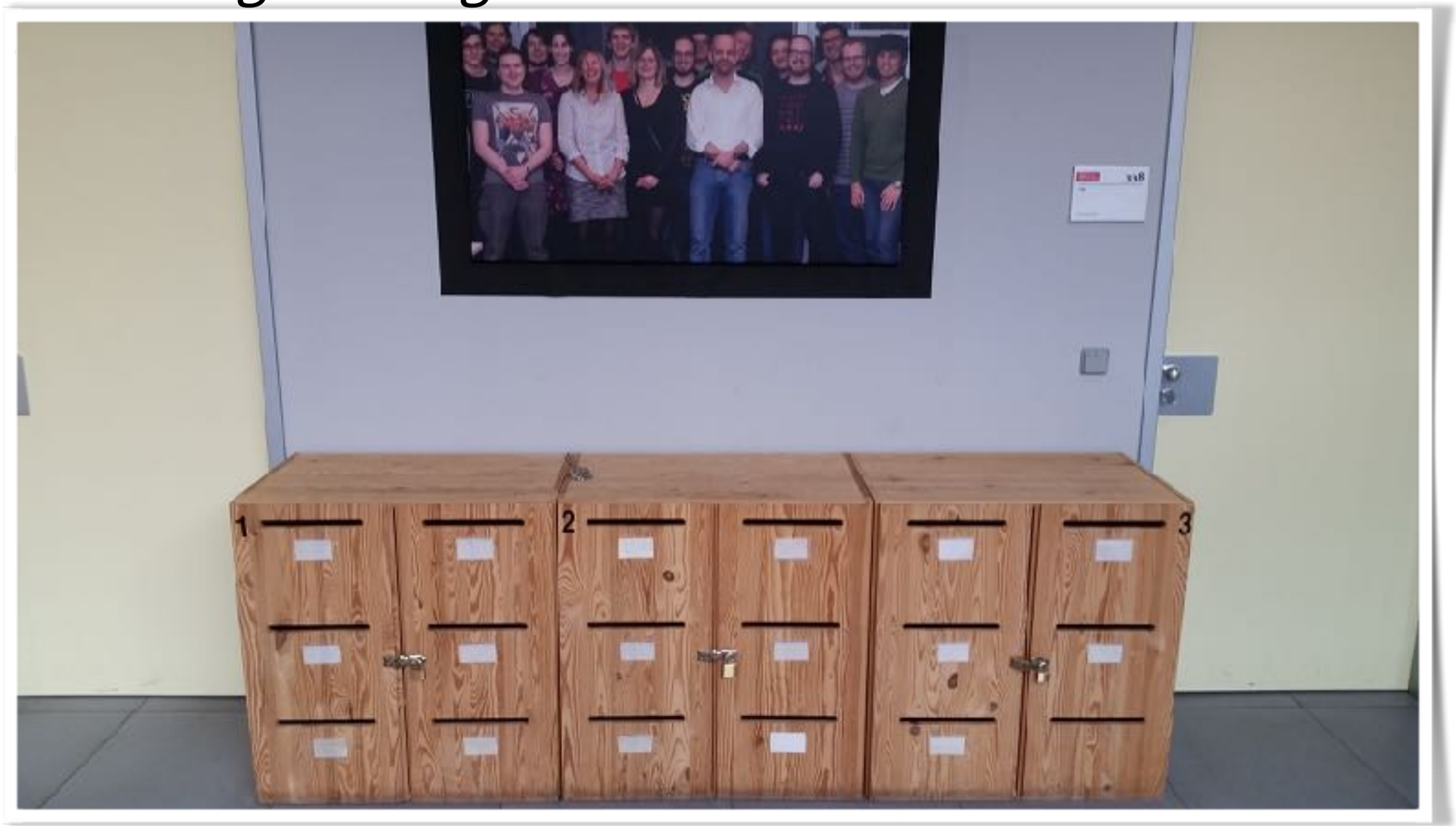
Christian Rieck, Arne Schmidt

Organisatorisches

- Anmeldung Mailingliste
- Gruppeneinteilung für kleine Übungen
- 1. (bewertetes) Hausaufgabenblatt
  - seit Montag (06.11.2017) draußen
  - abgeben bis 20.11.2017 11:30 Uhr
  - Hausaufgabenschrank Algorithmik

Organisatorisches

- Anmeldung Mailingliste
- G
- 1.
  -
  -
  -



Organisatorisches

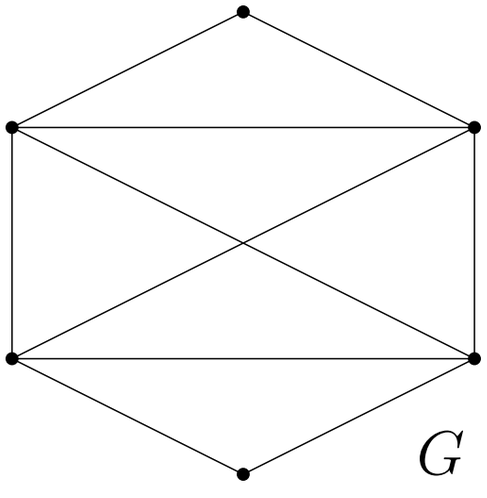
- Anmeldung Mailingliste
- Gruppeneinteilung für kleine Übungen
- 1. (bewertetes) Hausaufgabenblatt
  - seit Montag (06.11.2017) draußen
  - abgeben bis 20.11.2017 11:30 Uhr
  - Hausaufgabenschrank Algorithmik
- Prüfungsanmeldung beim jeweiligen Prüfungsamt
  - vom 12.12.2017 bis 11.01.2018 (ohne Gewähr!!!)
  - z.B. Prüfungsamt Informatik

Fragen?

Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- Die Zahl 13 ist ungerade.
- Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist n(n+1)/2.
- In einem zusammenhängenden, einfachen Graphen mit n Knoten und n-1 Kanten gibt es mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Der Graph G ist eulersch.



Balance zwischen Formalität und Bequemlichkeit.

Mathematische Aussagen

Die Zahl 13 ist ungerade.

Es gibt eine natürliche Zahl k mit $2k+1 = 13$.

Mathematische Aussagen

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist n(n+1)/2.

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Mathematische Aussagen

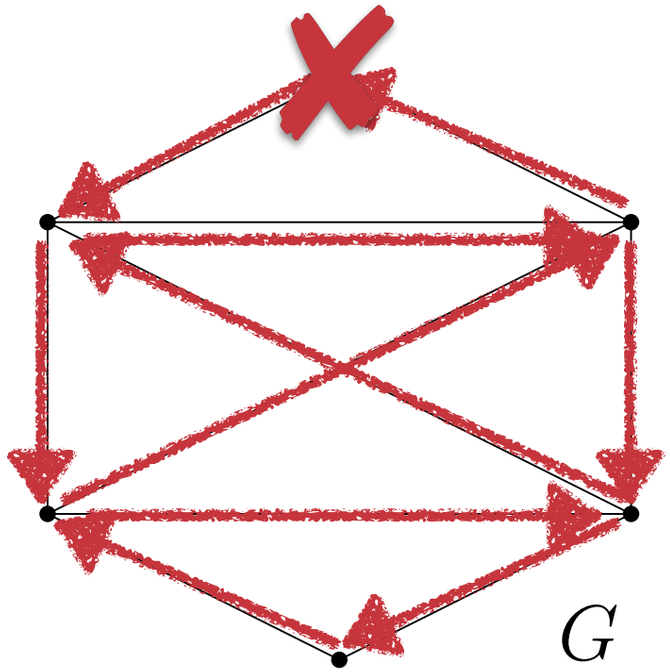
In einem zusammenhängenden, einfachen Graphen mit n Knoten und n-1 Kanten gibt es mindestens zwei Knoten vom Grad 1.

Für alle zusammenhängenden, einfachen Graphen mit n Knoten und n-1 Kanten gilt: es gibt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.

Mathematische Aussagen

Der Graph G ist eulersch.

Es existiert eine Eulertour in G.



Logische Verknüpfungen

Mathematische Aussagen lassen sich durch logische Junktoren verknüpfen, wobei das Ergebnis wieder eine Aussage ist.

NICHT	$\neg A$	Negation
ODER	$A \vee B$	Disjunktion
UND	$A \wedge B$	Konjunktion
FOLGERUNG	$A \Rightarrow B$	Implikation
GDW	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz

Quantoren und Negation

Negation von Existenzaussage: Es gibt keine ganze Zahl k mit 2k=7.
Wird zu Allaussage: Für alle ganzen Zahlen k gilt 2k ≠ 7.

$$\neg\exists x\ A(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg A(x)$$

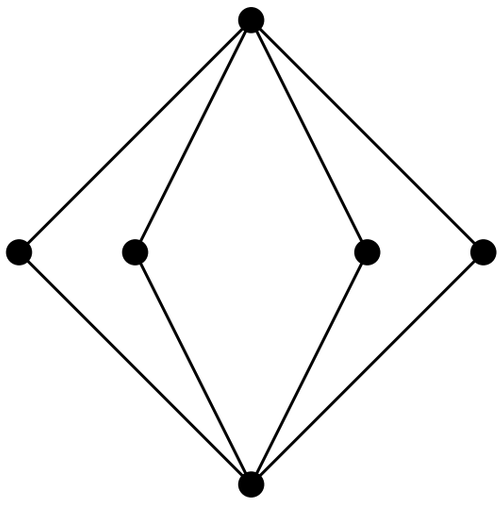
Negation von Allaussage: Nicht alle natürlichen Zahlen sind prim.
Wird zu Existenzaussage: Es gibt eine natürliche Zahl die nicht prim ist.

$$\neg\forall x\ A(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg A(x)$$

Beweis von Existenzaussagen

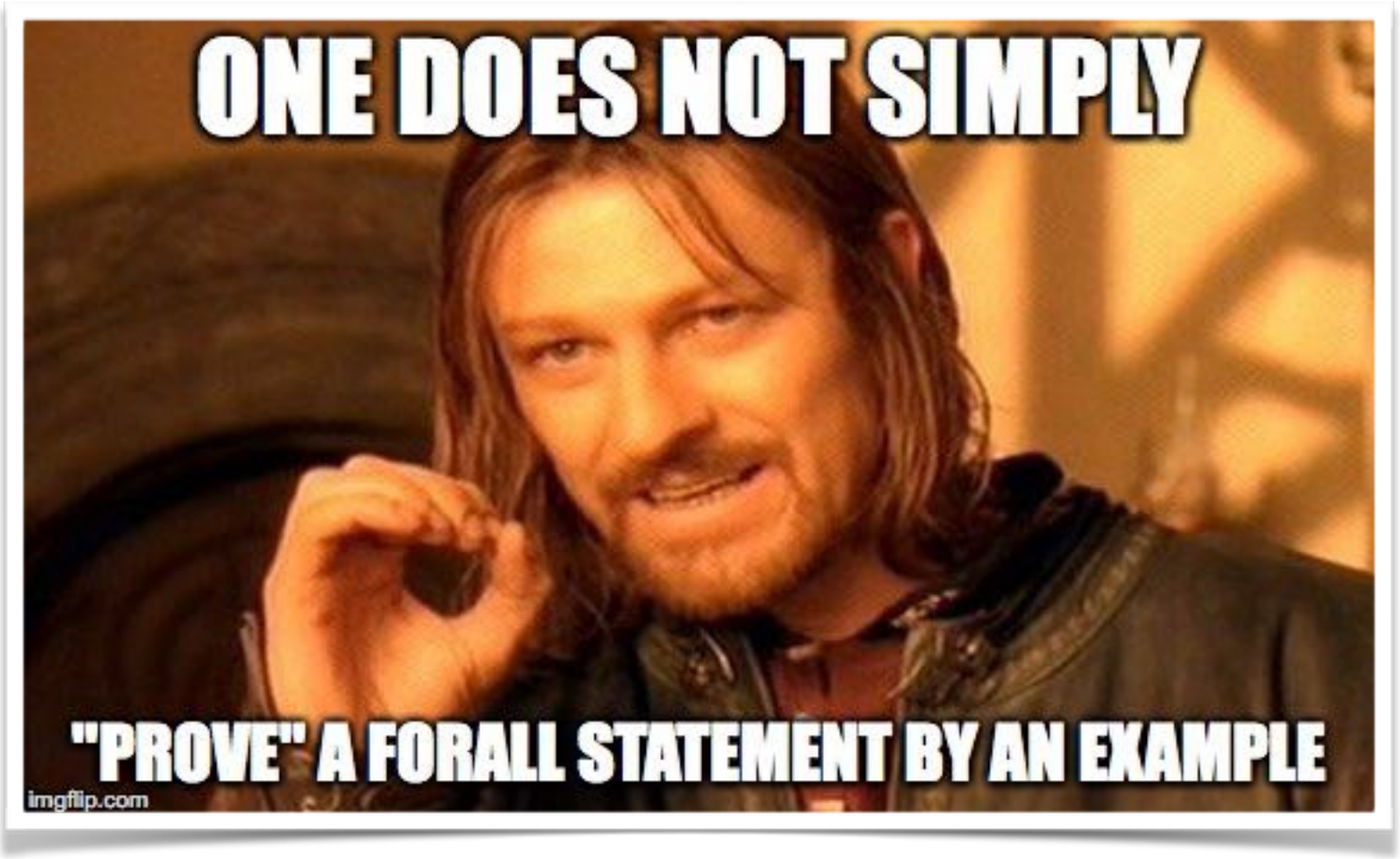
Existenzaussagen lassen sich meistens leicht beweisen, da die Angabe eines Beispiels (mit Begründung) ausreicht.

- Es gibt eine natürliche Zahl k mit $2k+1 = 13$. $k = 6$.
- Es gibt Graphen mit ausschließlich geraden Knotengraden, die nicht hamiltonsch sind.



Beweis von Allaussagen

Allaussagen lassen sich nicht mit einem Beispiel beweisen.

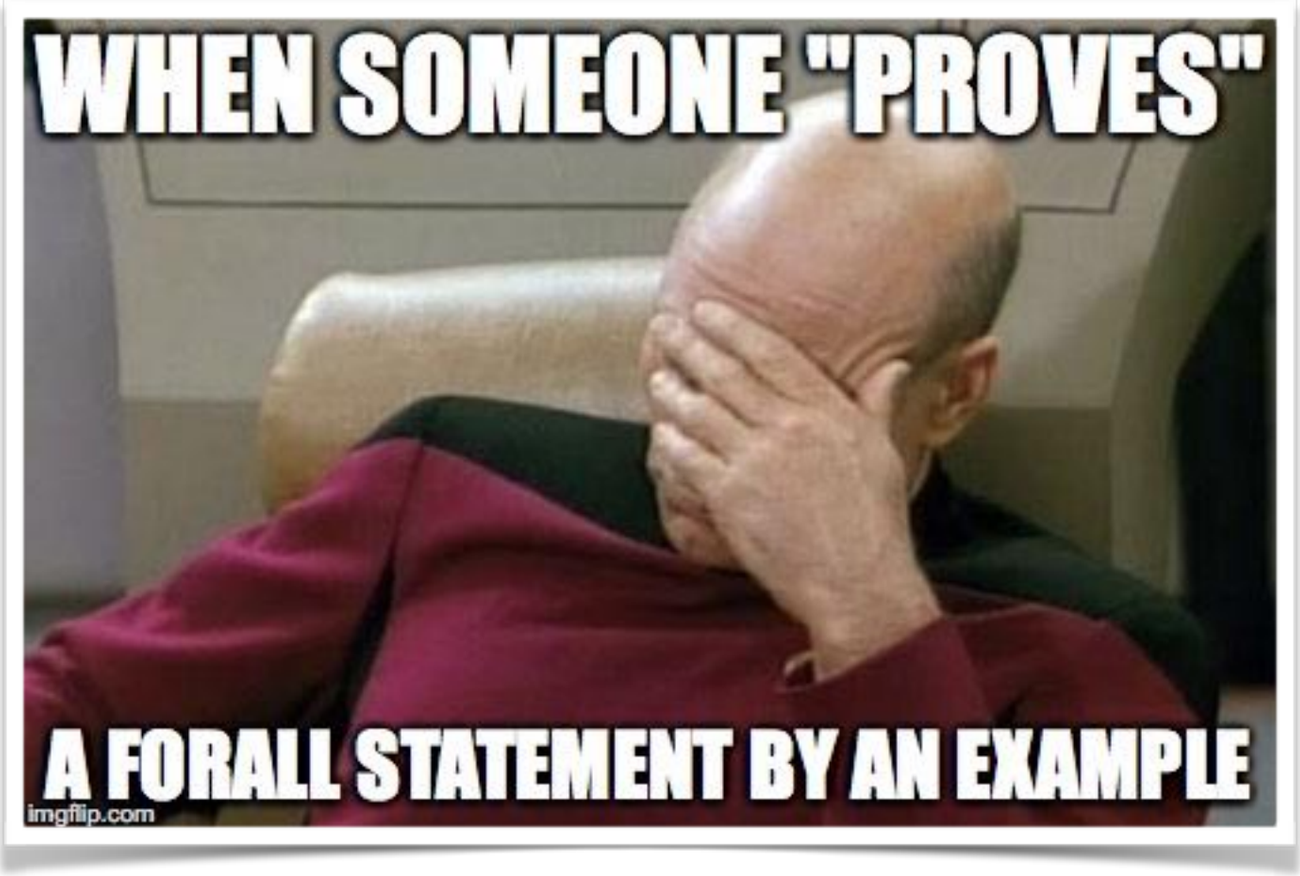


Beweis von Allaussagen

Allaussagen lassen sich nicht mit einem Beispiel beweisen.

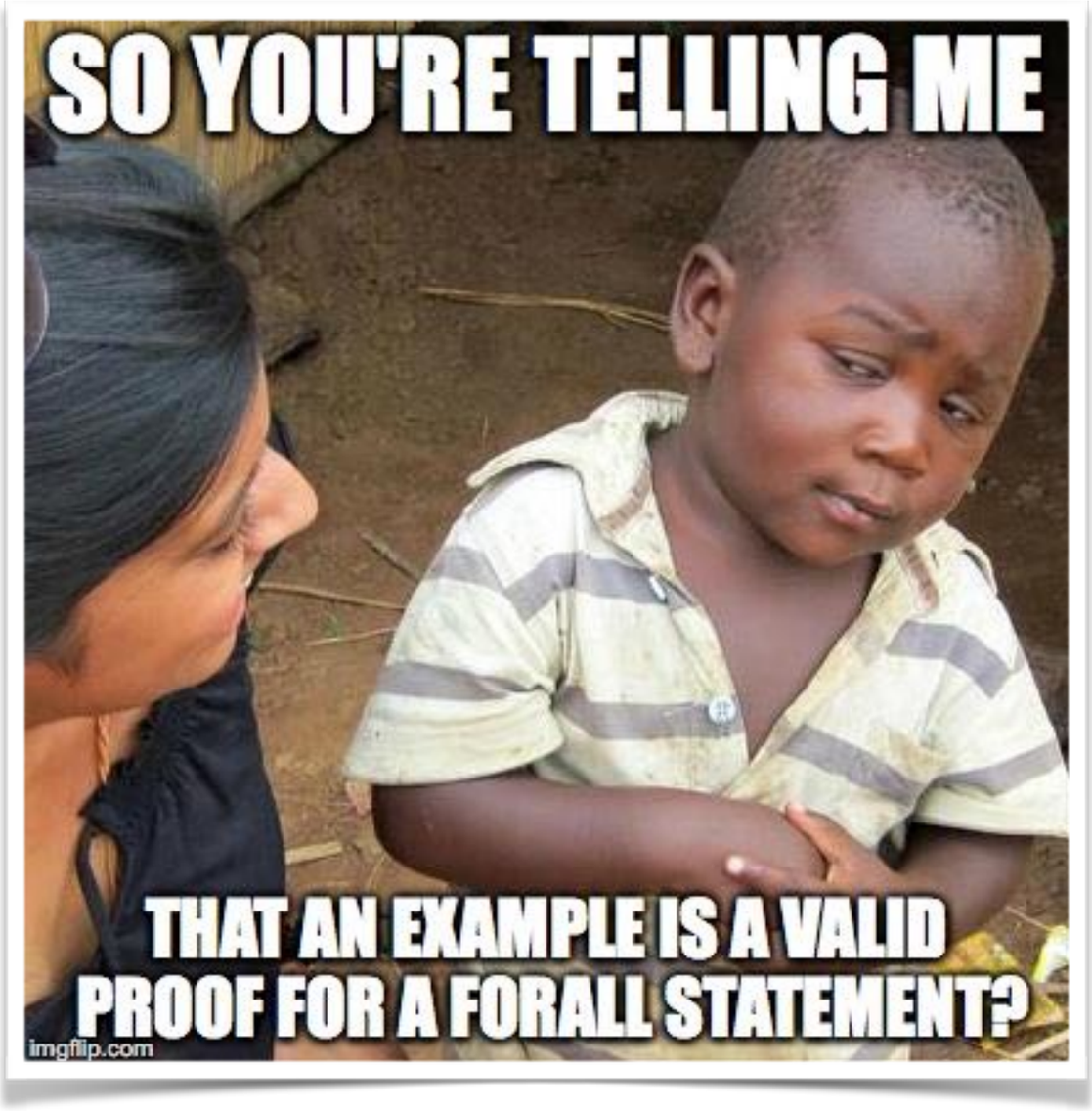
Beweis von Allaussagen

Allaussagen lassen sich nicht mit einem Beispiel beweisen.



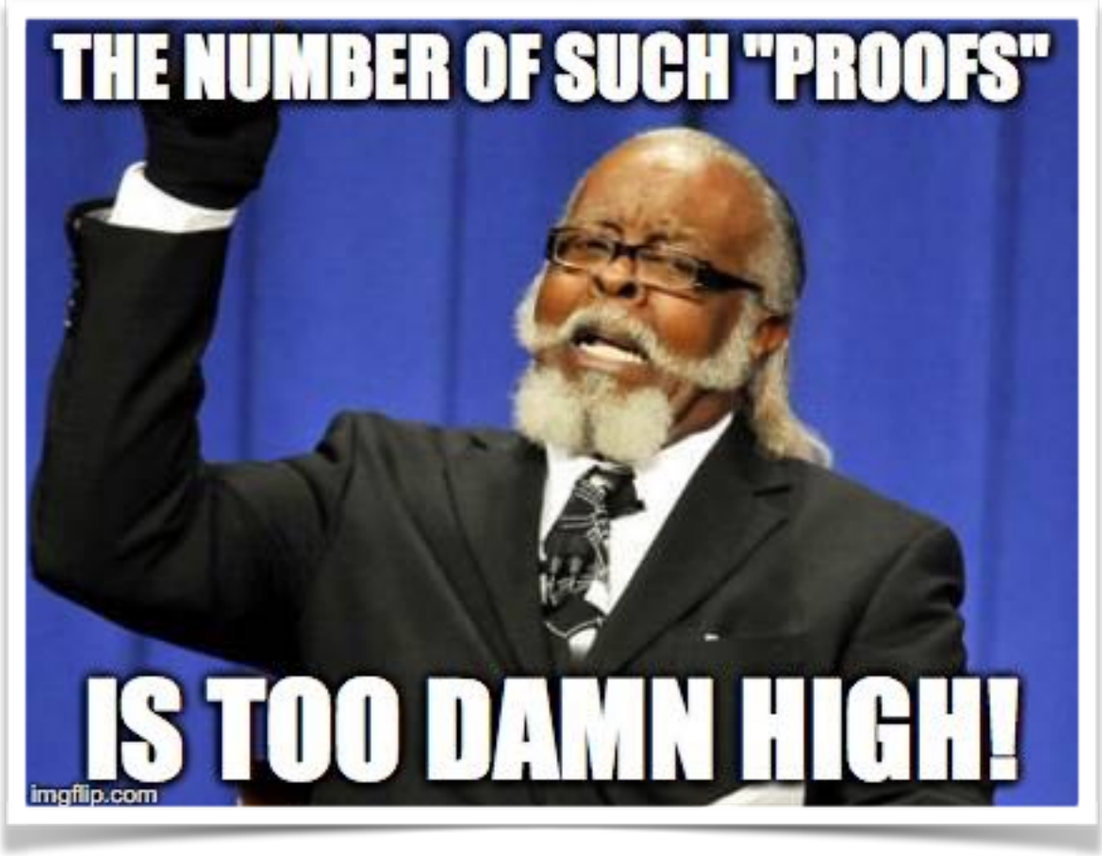
Beweis von Allaussagen

Allaussagen lassen sich nicht mit einem Beispiel beweisen.



Beweis von Allaussagen

Allaussagen lassen sich nicht mit einem Beispiel beweisen.

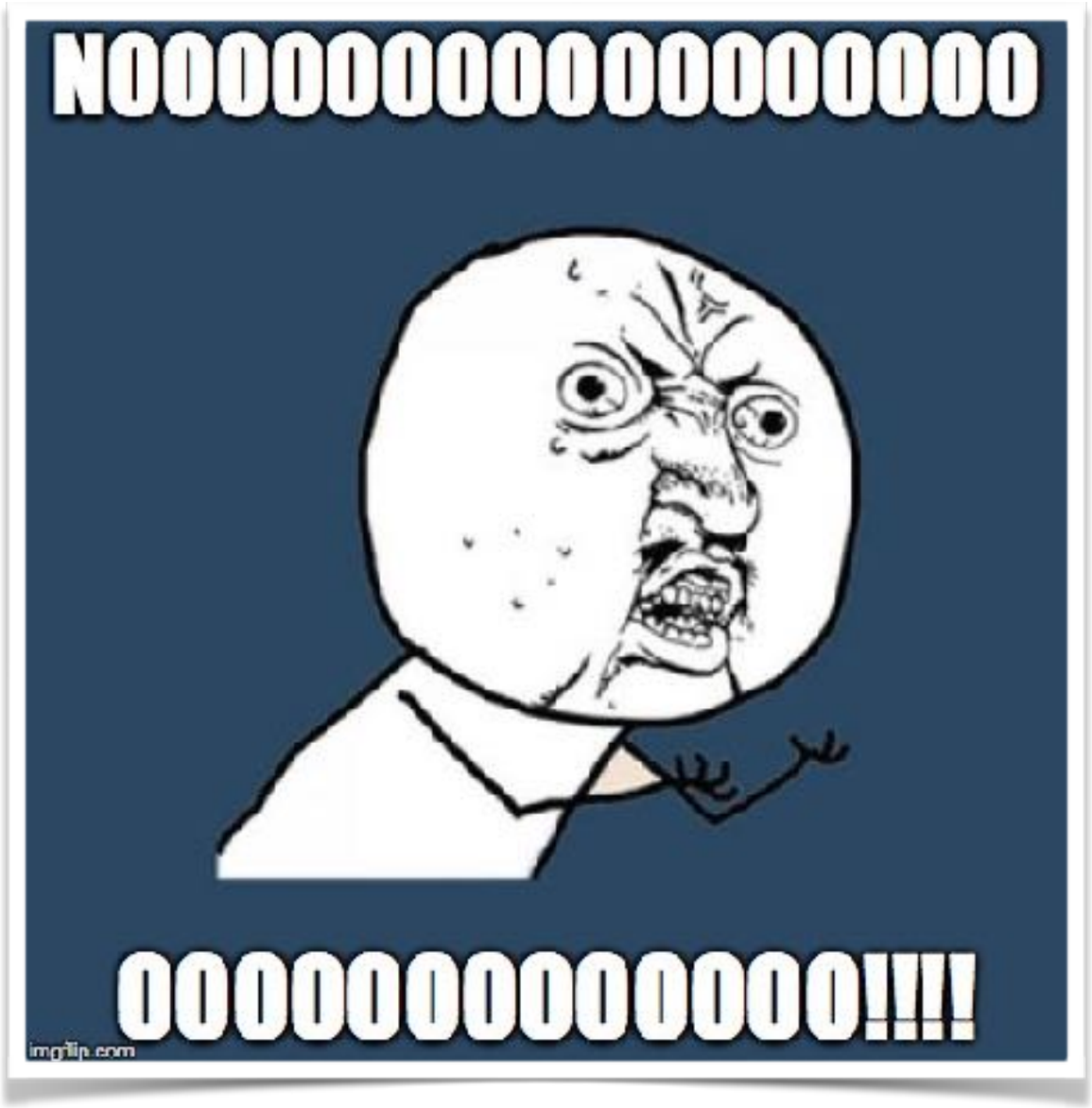


Beweis von Allaussagen

Allaussagen lassen sich nicht mit einem Beispiel beweisen.

Beweis von Allaussagen

Allaussagen lassen sich nicht mit einem Beispiel beweisen.



Beweis von Allaussagen

Aber: Allaussagen lassen sich durch ein Beispiel widerlegen!

Behauptung: Alle Autos sind blau.

(Nicht alle Autos sind blau.)

Voraussetzung und Schlussfolgerungen

Fast immer ist eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ zu zeigen.

Bevor man mit dem Beweis beginnt, sollte man klären was A und B sind.

- A sind die Voraussetzungen
- B sind die Schlussfolgerungen

- Für jede ungerade ganze Zahl n ist n^2 ungerade.
- Jeder kreisfreie Graph mit $|V|-1$ Kanten ist zusammenhängend.

- Sei n eine ungerade ganze Zahl. Dann ist n^2 ungerade.
- Sei G kreisfrei mit $|V|-1$ Kanten. Dann ist G zusammenhängend.

Direkter Beweis

Bei dem direkten Beweis leiten wir die Schlussfolgerungen direkt durch eine logische Folgerungskette aus den Voraussetzungen her.

$$\text{Für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x, y \geq 0 \text{ ist } \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Voraussetzungen: $x, y \in \mathbb{R} \wedge x, y \geq 0$

Schlussfolgerung: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Direkter Beweis

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \Rightarrow xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x-y)^2 \quad \text{wahr!}$$

Dies ist leider KEIN Beweis für gar nichts. Wir sind von den Schlussfolgerungen ausgegangen und haben daraus etwas Wahres gefolgert. Das funktioniert nicht.

Direkter Beweis

Es gilt: $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$

Addition von 4xy ergibt

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy \geq 4xy$$

also

$$\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$$

Monotonie der Wurzelfunktion ergibt die Behauptung

$$\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Direkter Beweis

Es gilt: $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$

Addition von 4xy ergibt

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy \geq 4xy$$

Achtung: Es scheint so als hätten wir die Folgerungspfeile einfach umgekehrt um einen korrekten Beweis zu bekommen. Dies funktioniert im Allgemeinen NICHT!

$$\frac{(x+y)}{4} \geq xy$$

Monotonie der Wurzelfunktion ergibt die Behauptung

$$\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Kontraposition

Manchmal ist es schwer, die Folgerung A ⇒ B direkt zu zeigen. Dann bietet sich eventuell die Kontraposition an.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wenn A B impliziert, dann kann A nicht gelten, wenn B nicht gilt.

Äquivalent ist auch die folgende Aussage.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Kontraposition

Manchmal ist es schwer, die Folgerung A ⇒ B direkt zu zeigen. Dann bietet sich eventuell die Kontraposition an.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wenn

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

t gilt.

Kontraposition

Manchmal ist es schwer, die Folgerung A ⇒ B direkt zu zeigen. Dann bietet sich eventuell die Kontraposition an.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wenn A B impliziert, dann kann A nicht gelten, wenn B nicht gilt.

Äquivalent ist auch die folgende Aussage.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Im Allgemeinen gelten folgende Äquivalenzen NICHT!

$$(A \Rightarrow B) \not\Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \not\Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$$

Widerspruchsbeweis

Nutze die Tatsache, dass Aussagen entweder wahr oder falsch sind.

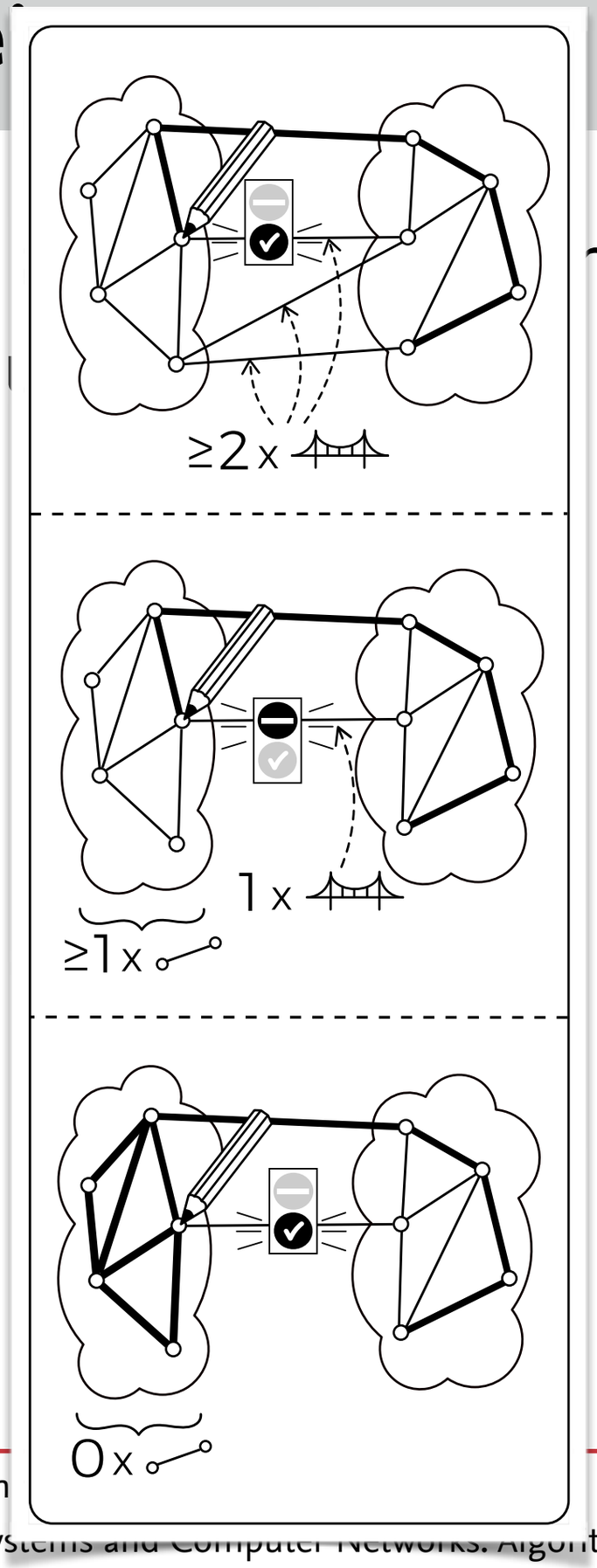
- Nimm an, die zu beweisende Aussage A sei falsch.
- Dann kann $\neg A$ als Voraussetzung genutzt werden.
- Nutze dies, um einen Widerspruch zu erzeugen.
- Dann kann die Annahme $\neg A$ nicht wahr sein, also gilt A.

Widerspruchsbeweis

<u>Behauptung:</u> Besitzt ein zusammenhängender Graph eine Brücke, so besitzt er Knoten mit ungeradem Grad.

Widerspruchsbewe

Behauptung: Besitzt ein nder Graph eine Brücke, so besitzt er Knoten mit



idea-instructions.com/euler-path/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

Widerspruchsbeweis

Behauptung: Besitzt ein zusammenhängender Graph eine Brücke, so besitzt er Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis: Sei G ein Graph mit mindestens einer Brücke und angenommen alle Knoten des Graphen haben geraden Grad. Dann hat dieser Graph eine Eulertour. Sei e eine Brücke. Durch das Entfernen von e aus G zerfällt der Graph in zwei Zusammenhangskomponenten. e muss auf der Eulertour liegen. Wird e benutzt, verlässt man eine Komponente und kommt nicht mehr zurück (ohne e doppelt abzulaufen); ansonsten wäre e keine Brücke in G. G besitzt also Knoten von ungeradem Grad.

Widerspruchsbeweis

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen,

$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$.

Betrachte das Produkt aller endlichen Primzahlen +1.

$q = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$

q darf keine Primzahl sein! (Warum?)

Keine Primzahl teilt q, also muss q prim sein.

Widerspruch! Somit ist die Behauptung gezeigt.

Vollständige Induktion

Beweismethode für Allaussagen

- funktioniert, wenn sich alle Elemente inkrementell aufbauen lassen
- Natürliche Zahlen
- Graphen
- ...

Statt $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \; P(n)$ zeigt man

$P(n_0)$ und $\forall x \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \; (P(x) \Rightarrow P(x+1))$

Vollständige Induktion: Gauß'sche Summenformel

Zeige: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Wir zeigen dies mit vollständiger Induktion über n.

I.A.: P(1) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2}$

I.V.: Sei n beliebig und gelte $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ für n ≥ k.

Vollständige Induktion: Gauß'sche Summenformel

I.S.: $$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \underset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Damit ist P(n+1) gezeigt. Nach dem Prinzip der Induktion folgt die Behauptung.

Vollständige Induktion (auf Graphen)

Behauptung: Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

Beweis: Sei P(n) die Aussage, dass ein Graph mit n Knoten zusammenhängend ist, wenn alle Knoten mindestens den Grad 1 haben.

I.A.: Der kleinste Graph, bei dem jeder Knoten (mind.) Grad 1 besitzt zwei Knoten und eine Kante. Damit ist P(2) gezeigt.

Vollständige Induktion (auf Graphen)

<u>I.S.:</u> Wir müssen zeigen, dass $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ für alle $n \geq 2$.

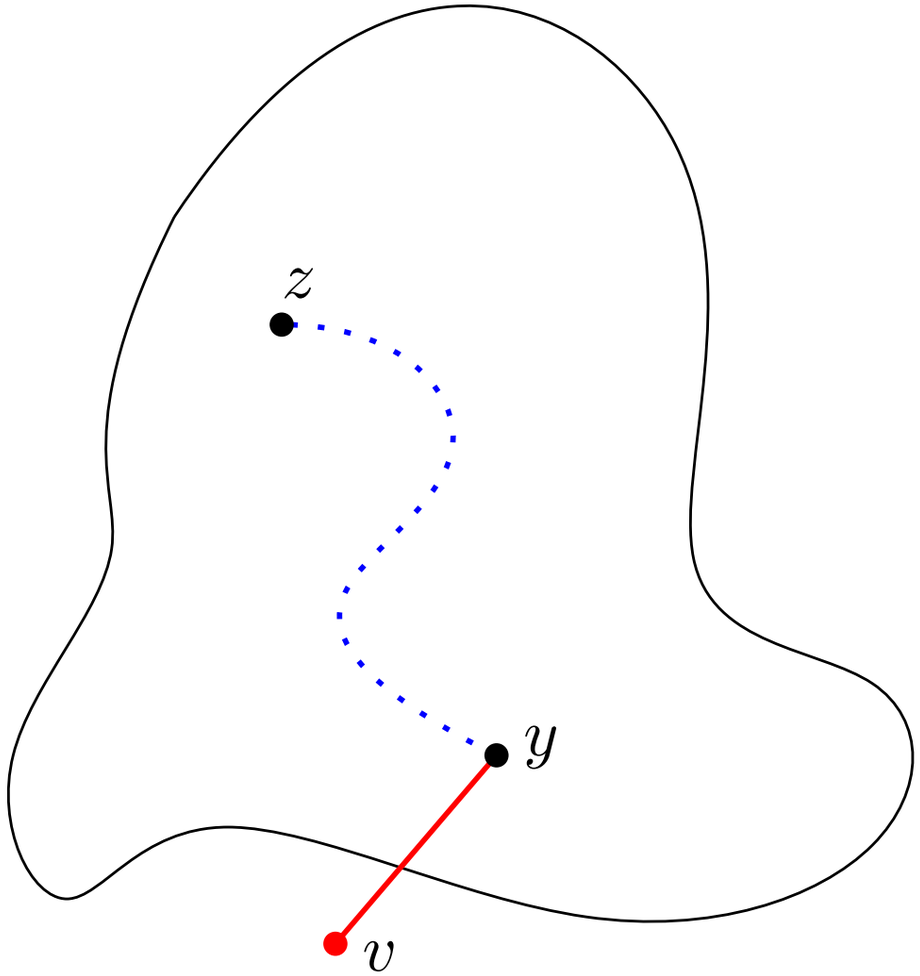
Betrachte einen Graphen mit n Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat. Nach Annahme P(n) ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

Vollständige Induktion (auf Graphen)

Nun fügen wir einen neuen Knoten hinzu um einen Graphen mit n+1 Knoten zu erhalten.

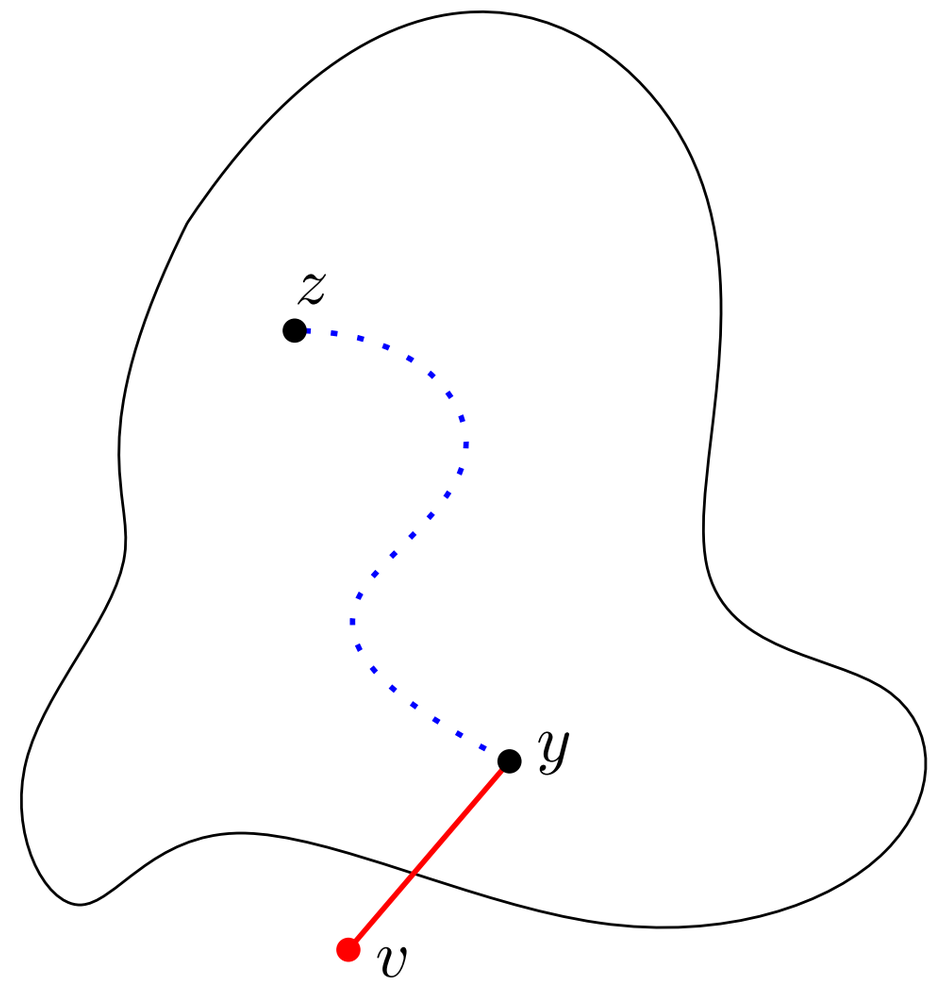
Wir müssen nur noch zeigen, dass zwischen dem neuen Knoten v und jedem anderen Knoten ein Pfad existiert.

Da der Knoten v (mind.) den Grad 1 hat (siehe Behauptung), ist er zu (mind.) einem Knoten benachbart; y.



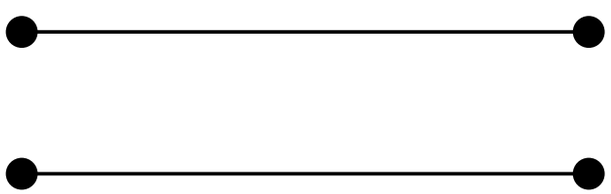
Vollständige Induktion (auf Graphen)

Sei nun der Knoten z beliebig gewählt, können wir einen Pfad von v zu z finden, in dem wir den Pfad von y zu z mit der Kante vy verbinden.



Dies beweist P(n+1). Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist P(n) wahr für alle n ≥ 2, was zu beweisen war.

Aber:



Vollständige Induktion (auf Graphen)

Dies ist ein typischer “build-up error”.

Diese entstehen häufig durch die fehlerhafte Annahme, jeder Graphen der Größe n+1 mit einer bestimmten Eigenschaft kann auf Grundlage eines Graphen der Größe n mit dieser Eigenschaft erstellt werden.

Vollständige Induktion (auf Graphen)

Um diesen “build-up error” zu vermeiden, nutzt man einen “shrink down, grow back”-Ansatz im Induktionschritt.

Man nimmt einen **beliebigen** Graphen mit n+1 Knoten, entfernt einen Knoten, wendet die Induktionsvoraussetzung P(n) auf diesen Graphen an, fügt die Knoten anschließend wieder ein und argumentiert, dass P(n+1) gilt.

Was passiert, wenn wir dies auf die Behauptung von eben anwenden?

Vollständige Induktion (auf Graphen)

Behauptung: Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

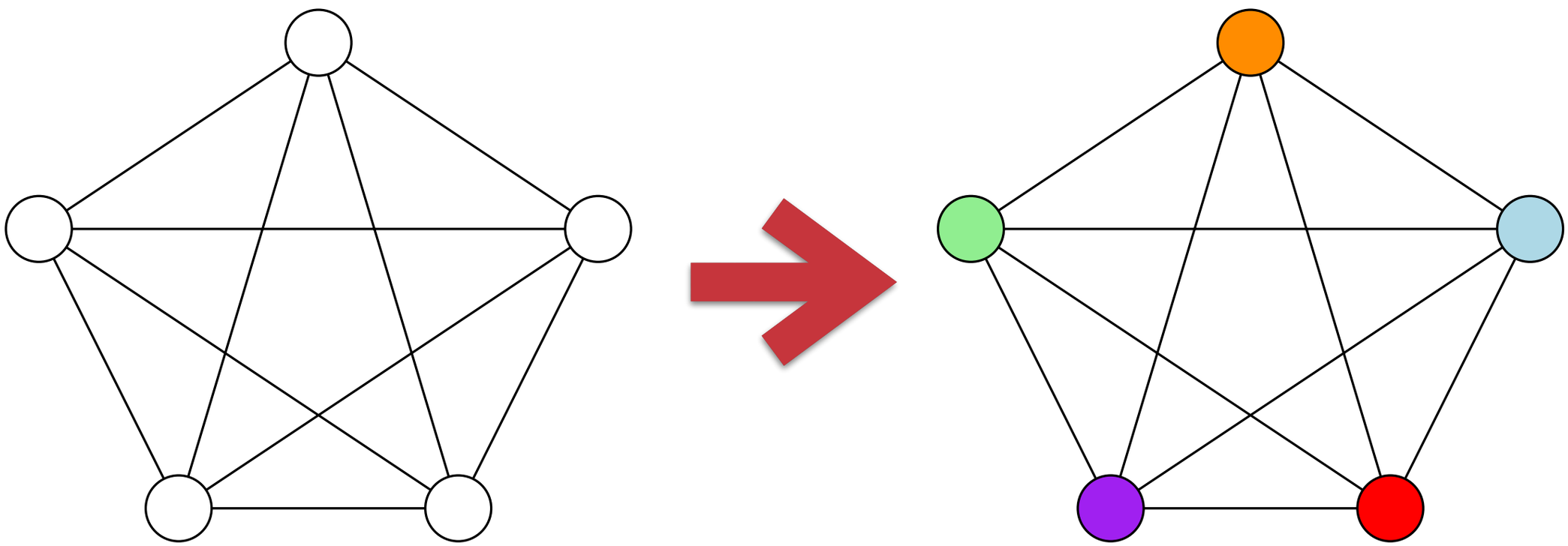
I.S.: Zeige, dass aus P(n) auch P(n+1) folgt, für alle $n \geq 2$.

Betrachte einen Graphen G mit n+1 vielen Knoten. Lösche einen beliebigen Knoten (mit samt seiner inzidenten Kanten) und erhalte einen Graphen G' mit n Knoten bei dem jeder Knoten (mind.) den Grad 1... whoops.

Es können Knoten vom Grad 0 entstehen, so dass auf diesen Graphen P(n) nicht anwendbar ist; zum Glück, denn die Behauptung ist falsch, wie wir gesehen haben!

Färbung von Graphen

<u>Problem:</u> Färbe die Knoten des Graphen so, dass benachbarten Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!



Vollständige Induktion (auf Graphen)

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist (k+1)-färbbar.

Wir wollen diese Behauptung mit Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen beweisen.
Sei P(n) die Behauptung, dass ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad höchstens k, (k+1)-färbbar ist.

I.A.: n=1 ⇒ Ein Graph mit nur einem Knoten hat Maximalgrad 0. Dieser Graph ist mit einer Farbe färbbar. P(1) gilt also.

I.V.: Gelte die Behauptung P(n) für n, k beliebig; n fest.

Vollständige Induktion (auf Graphen)

<u>I.S.:</u> Sei P(n) wahr und sei G ein Graph mit n+1 vielen Knoten und Maximalgrad k. Wir entfernen einen beliebigen Knoten v (mitsamt seiner inzidenten Kanten). Damit erhalten wir einen Graphen G' mit n Knoten. Der Maximalgrad ändert sich nicht zwangsläufig, ist also k. G' ist also nach I.V. mit k+1 vielen Farben färbbar.

Nun fügen wir den Knoten v (und seine inzidenten Kanten) wieder hinzu. Da v maximal k viele Nachbarn hat, und wir k+1 viele Farben zur Verfügung haben, können wir v mit der übrigen Farbe färben.

Damit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der Induktion.

Typische Aufgaben

- “Zeige A ⇒ B”: Aussage ist wahr, gefordert ist ein Beweis
- “Zeige oder widerlege: A ⇒ B”: selbst überlegen ob die Aussage stimmt; entsprechendes beweisen

Grundsätzlich gilt in den Hausaufgaben

- vollständiger, korrekter Beweis: volle Punktzahl
- kleine Lücken, Randfälle übersehen: geringer Punktabzug
- Teilaussagen korrekt bewiesen: Teilpunkte
- falsche Herangehensweise: keine Punkte
- Beweis falsch: keine Punkte

Häufige Fehler

- Typ der Aussage falsch eingeschätzt
  - Allaussage per Beispiel, etc.
- Unzulässige Annahmen / Einschränkungen
- Aussagen der Form “A ⇒ B”
  - Voraussetzung und Schlussfolgerung vermischt
  - Falsche Richtung gezeigt
- Aussagen der Form “A⇔B”
  - Nur eine Richtung gezeigt
  - Zwei Beweise für die gleiche Richtung

Beweise allgemein

Es gibt keine grüne Lampe die bei einem korrekten Beweis aufleuchtet. Und keine rote Lampe bei Fehlern.

- es gibt kein einfaches Rezept
- kreativer Prozess
- gute Beweise sind nachvollziehbar, aber schwer zu finden
- es kann Jahre dauern, bis man die richtige Idee hat
- Verifikation ist eventuell schwierig

Achtung: zu beweisende Aussagen sehen manchmal trivial aus, sind aber trotzdem falsch.

Fehlerhafter Beweis

$$x = y$$

$$x^2 = xy$$

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

$$(x+y)(x-y) = y(x-y)$$

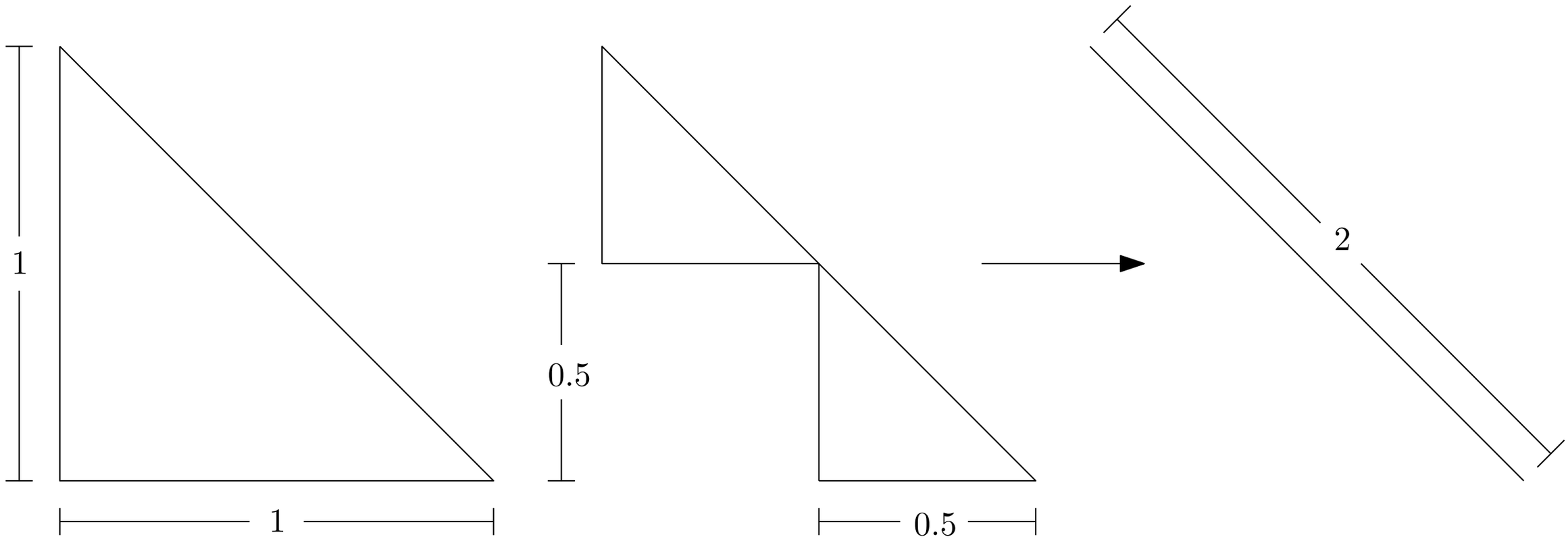
$$x+y = y$$

$$2y = y$$

$$2 = 1$$

Wo ist der Fehler?

Hat Pythagoras unrecht?



Fehlerhafte Induktion

<u>Behauptung:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b, n gilt $a^n = b^n$.

Wir wollen diese Behauptung mittels vollständiger Induktion über n beweisen.

I.A.: n=0 $\Rightarrow a^0 = 1 = b^0$.

I.V.: Seien a, b beliebig und n beliebig aber fest, dann gilt

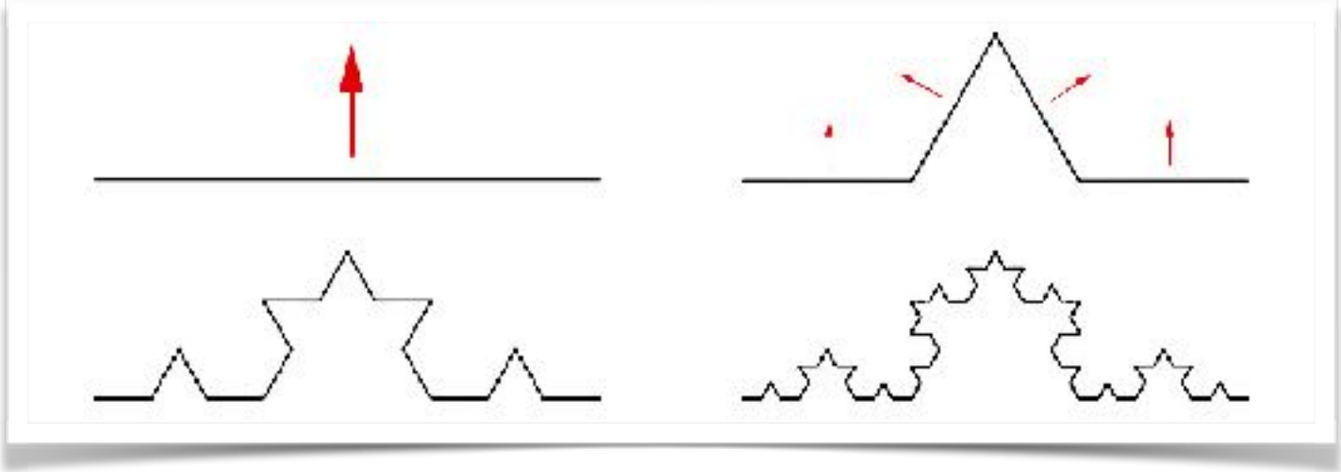
$$a^n = b^n.$$

I.S.: $a^{n+1} = a^n \cdot a^1 \underset{\text{I.V.}}{=} b^n \cdot b^1 = b^{n+1}$ ↯

Wait, what? #1

<u>Behauptung:</u> Eine Fläche mit endlichem Flächeninhalt hat einen Umfang endlicher Länge.

Gegenbeispiel: Koch-Kurve.



Flächeninhalt: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$

Umfang: $\left(\frac{4}{3}\right)^n$

https://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake

Wait, what? #2

<u>Behauptung:</u> Durch Umordnung der Terme in einer Reihe ändert sich ihr Grenzwert nicht.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) = 0.693147180559945$$

Wait, what? #2

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

Wait, what? #2

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Da $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} = \frac{1}{2(2k-1)}$

können wir die Reihe auch so schreiben:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k)} + \cdots$$

Wait, what? #2

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k)} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Äääähm....

Wait, what? #2

$$\ln(2) =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

$$=$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_series_theorem

Wait, what? #n

https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

https://en.wikipedia.org/wiki/Menger_sponge

...