1

__Satz__

Select bestimmt das k-te Element x.

__Beweis:__ Vollständige Induktion über $|X| = n$

IA: Für $n \leq 5$ benutzen wir ersten Ansatz ✓

IV: Select ist korrekt für Mengen mit $< n$ Elementen.

IS: Es treten 3 Fälle auf:

1. $x \in X_1$
2. $x \in X_2$
3. $x \in X_3$

Alle $|X_i| < n \overset{IV}{\Longrightarrow}$ Das k-te Element wird korrekt bestimmt. $\square$

Es bleibt die Frage, wie schnell Select ist. Als rekursive Gleichung erhalten wir:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T(\max(|X_1|, |X_3|)) + \Theta(n)$$

rek Aufruf für M'

rek. Aufruf auf X_1 oder X_3

Aufteilung der Blöcke + deren Sortierung

Frage: Wie groß sind X_1 und X_3 maximal?

Bzw: Wieviele Elemente sind nicht in X_1 bzw X_3?

Am Beispiel:

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

sortieren bzgl m_i →

gehören nicht zu X_3!

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	$\boxed{13}$	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

Man sieht: Es gehören etwa $\frac{1}{4}|X|$ Elemente nicht zu X_3

$\Rightarrow |X_3| \leq \frac{3}{4}|X| = \frac{3}{4}n$

~~Analog~~ Analog: $|X_1| \leq \frac{3}{4}n$

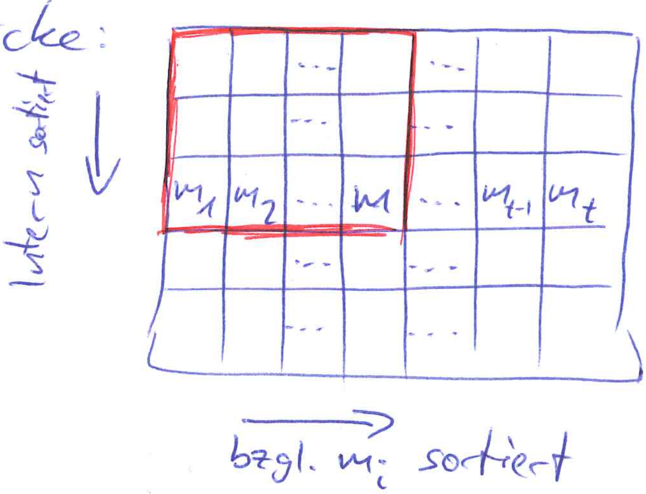
Formal:

Lemma

$|X_1|, |X_3| \leq \frac{7}{10}n$

Beweis

Sei $m_1 < m_2 < \ldots < m_t$. Betrachte die Blockform der t Blöcke:



~~(Die Blöcke selbst sind aufsteigend sortiert~~

$\Rightarrow m_1, \ldots, m_{\lceil \frac{t}{2} \rceil} \leq m$

In jedem Block B_i, $1 \leq i \leq \lceil \frac{t}{2} \rceil$, gibt es 3 Elemente $\leq m$

$\Rightarrow |\{x \in X \mid x \leq m\}| \geq 3 \cdot \lceil \frac{t}{2} \rceil = 3 \cdot \lceil \frac{n}{10} \rceil \geq 3 \cdot \frac{n}{10}$

$\Rightarrow |X_3| \leq n - 3 \cdot \frac{n}{10} = \frac{7}{10}n$

(Für X_1 können wir analog zeigen: $|X_1| \leq \frac{7}{10}n$) $\square$

Satz: Select hat Laufzeit $\Theta(n)$

Beweis:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7}{10}n\right) + \Theta(n)$$

Mit dem MT folgt:

$m = 2$, $k = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{5}$, $\alpha_2 = \frac{7}{10}$

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{9}{10} < 1 \Rightarrow \text{Fall } 1$$

Also ist $T(n) \in \Theta(n)$ $\square$

Geht das noch schneller? Nein!

Satz

Das k-te Element zu bestimmen benötigt $\Omega(n)$ Zeit.

Beweis

Wir zeigen, dass mindestens $n-1$ Vergleiche nötig sind. Dies zeigen wir per Widerspruchsbeweis. Nehmen wir, es sind ~~nur~~ $\leq n-2$ Vergleiche nötig.

Sei m k-tes Element von X. Wir konstruieren einen Graphen $G=(V,E)$ mit $V \hat{=} X$ und $(x_i, x_j) \in E$ falls x_i mit x_j verglichen wird.

Da $|E| \leq n-2$ ist G nicht zusammenhängend, d.h. es existiert ~~en~~ $y \in X$ ~~mo~~ mit y und m in unterschiedlichen ZHKs. Also hängt der Algorithmus nicht von y ab. ↯

$\square$