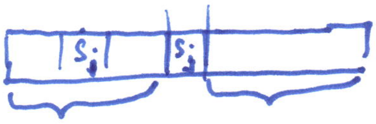
**Beweis:**

Wir betrachten eine zufällige Eingabepermutation, d.h. alle $n!$ Permutationen sind gleich wahrscheinlich, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n!}$.

Zwei Elemente $s_i$ und $s_j$ werden

- höchstens einmal verglichen
- genau dann verglichen, wenn eines das Referenzelement ist.

(Danach sind beide in verschiedenen Teilarrays!)




Wir betrachten eine Zufallsvariable

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } s_i \text{ und } s_j \text{ verglichen werden} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$$

die gesamte Zahl der Vergleiche.

Damit ergibt sich:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right]$$

„Erwartungswert"

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{E[X_{ij}]}_{= 1 \cdot P(X_{ij}=1) + 0 \cdot P(X_{ij}=0)} \qquad (*)$$

Wir müssen also die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass $s_i$ und $s_j$ verglichen werden.

Dafür betrachten wir

$$S_{ij} := \{ s_i, \dots, s_j \}. \qquad \boxed{s_i | \cdots | s_j}$$

Dann ist

$$P(s_i \text{ wird mit } s_j \text{ verglichen}) = P(s_i \text{ oder } s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij}).$$

Denn wird $s_i$ oder $s_j$ gewählt, wird es mit allen anderen verglichen; wird aber zuerst ein Pivot dazwischen gewählt, werden $s_i$ und $s_j$ getrennt und nicht mehr verglichen!

Da nur einer erster Pivot sein kann, ist

$$\begin{aligned} &P(s_i \text{ oder } s_j \text{ erster Pivot in } S_{ij}) \\ &= P(s_i \text{ erster Pivot in } S_{ij}) \\ &\quad + P(s_j \text{ erster Pivot in } S_{ij}) \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}, \qquad (**) \end{aligned}$$

denn die Pivots werden zufällig und unabhängig gewählt, und die Menge $S_{ij}$ hat $j-i+1$ Elemente

Jetzt kombinieren wir (*) und (**):

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

$\downarrow$ Setze $k := j-i$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1}$$

$$< \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}$$

Jetzt schätzen wir die harmonische Reihe ab:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$\leq \underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1} + \ldots + \frac{1}{2^{\log_2 n}}$$

Das sind $1 + \log_2 n$ Einsen, also

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \log_2 n, \quad \text{also}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \in \Theta(\log n)$$

und damit

$$E[X] \in O(n \log n).$$

$\square$