




Kapitel 5.4:
Nichtlineare Rekursionen
Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2016/17

Prof. Dr. Sándor Fekete

EvaSys	Lehrevaluation Informatik Vorlesung Wintersemester 2012/2013	Electric Paper
TU Braunschweig Carl-Friedrich-Gauss-Fakultät - Informatik	Prof. Dr. Sándor Fekete Algorithmen und Datenstrukturen	

Markieren Sie so: Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Dieser Fragebogen wird maschinell erfasst.
Korrektur: Bitte beachten Sie im Interesse einer optimalen Datenerfassung die links gegebenen Hinweise beim Ausfüllen.

1. Persönliche Angaben

1.1 In welchem Fachsemester studieren Sie?
 1./2. 3./4. 5./6.
 7./8. 9./10. > 10

1.2 Welchen Abschluss streben Sie derzeit an? Diplom Bachelor Master

1.3 In welchem Studiengang studieren Sie?
 Informatik Nebenfach Informatik Medienwissenschaften
 Wirtschaftsinformatik Mobilität und Verkehr IST
 CSE 2-Fächer Bachelor sonstiges

2. Wie häufig waren Sie in der ...?

Große Übung: Hörsaal Kleine Übung: Seminarraum
(Bitte nur kleine und große Übungen bewerten, wenn sie angeboten wurden)

2.1 Vorlesung (Anwesenheit) immer nie
2.2 Große Übung (Anwesenheit) immer nie
2.3 Kleine Übung (Anwesenheit) immer nie

3. Der/Die Lehrende war gut vorbereitet

3.1 Vorlesung (Vorbereitung) trifft zu trifft nicht zu
3.2 Große Übung (Vorbereitung) trifft zu trifft nicht zu
3.3 Kleine Übung (Vorbereitung) trifft zu trifft nicht zu

4. Der/Die Lehrende wirkte kompetent

4.1 Vorlesung (Kompetenz) trifft zu trifft nicht zu
4.2 Große Übung (Kompetenz) trifft zu trifft nicht zu
4.3 Kleine Übung (Kompetenz) trifft zu trifft nicht zu

5. Der/Die Lehrende vermittelt die Inhalte verständlich

5.1 Vorlesung (Inhaltsvermittlung) trifft zu trifft nicht zu
5.2 Große Übung (Inhaltsvermittlung) trifft zu trifft nicht zu
5.3 Kleine Übung (Inhaltsvermittlung) trifft zu trifft nicht zu

6. Zwischenfragen wurden verständlich beantwortet

6.1 Vorlesung (Zwischenfragen) trifft zu trifft nicht zu
6.2 Große Übung (Zwischenfragen) trifft zu trifft nicht zu
6.3 Kleine Übung (Zwischenfragen) trifft zu trifft nicht zu

7. Die Veranstaltung war gut strukturiert

7.1 Vorlesung (Struktur) trifft zu trifft nicht zu
7.2 Große Übung (Struktur) trifft zu trifft nicht zu
7.3 Kleine Übung (Struktur) trifft zu trifft nicht zu


8. Kann der Dozent begeistern?

8.1 Vorlesung (Begeisterung) ja, sehr nein, gar nicht
8.2 Große Übung (Begeisterung) ja, sehr nein, gar nicht
8.3 Kleine Übung (Begeisterung) ja, sehr nein, gar nicht

9. Bewerten Sie die Lehrveranstaltung insgesamt!

9.1 Vorlesung (allg. Bewertung) sehr gut sehr schlecht
9.2 Große Übung (allg. Bewertung) sehr gut sehr schlecht
9.3 Kleine Übung (allg. Bewertung) sehr gut sehr schlecht

F1699M1805P1PL0V0 21.11.2012, Seite 1/2



5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen

Satz 5.9 (Master-Theorem)

Sei $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R} : 0 < \alpha_i < 1, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

5.4 Nichtlineare Rekursionen

5.4.1 Logistische Rekursion

Wachstum proportional zu einer Größe:

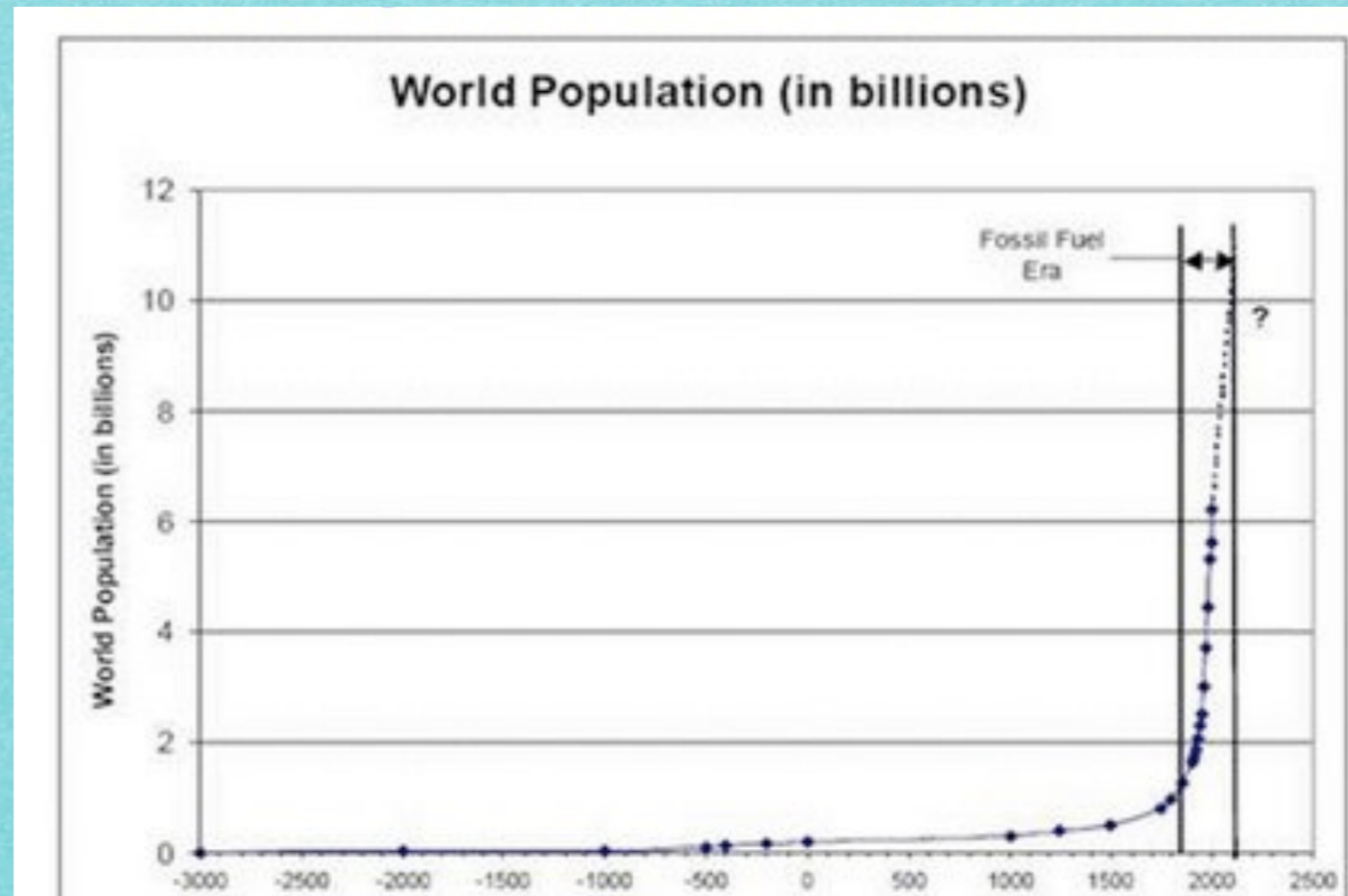
$$x_{n+1} = (1 + q)x_n$$

Ergebnis:

$$x_n = (1 + q)^n x_0$$

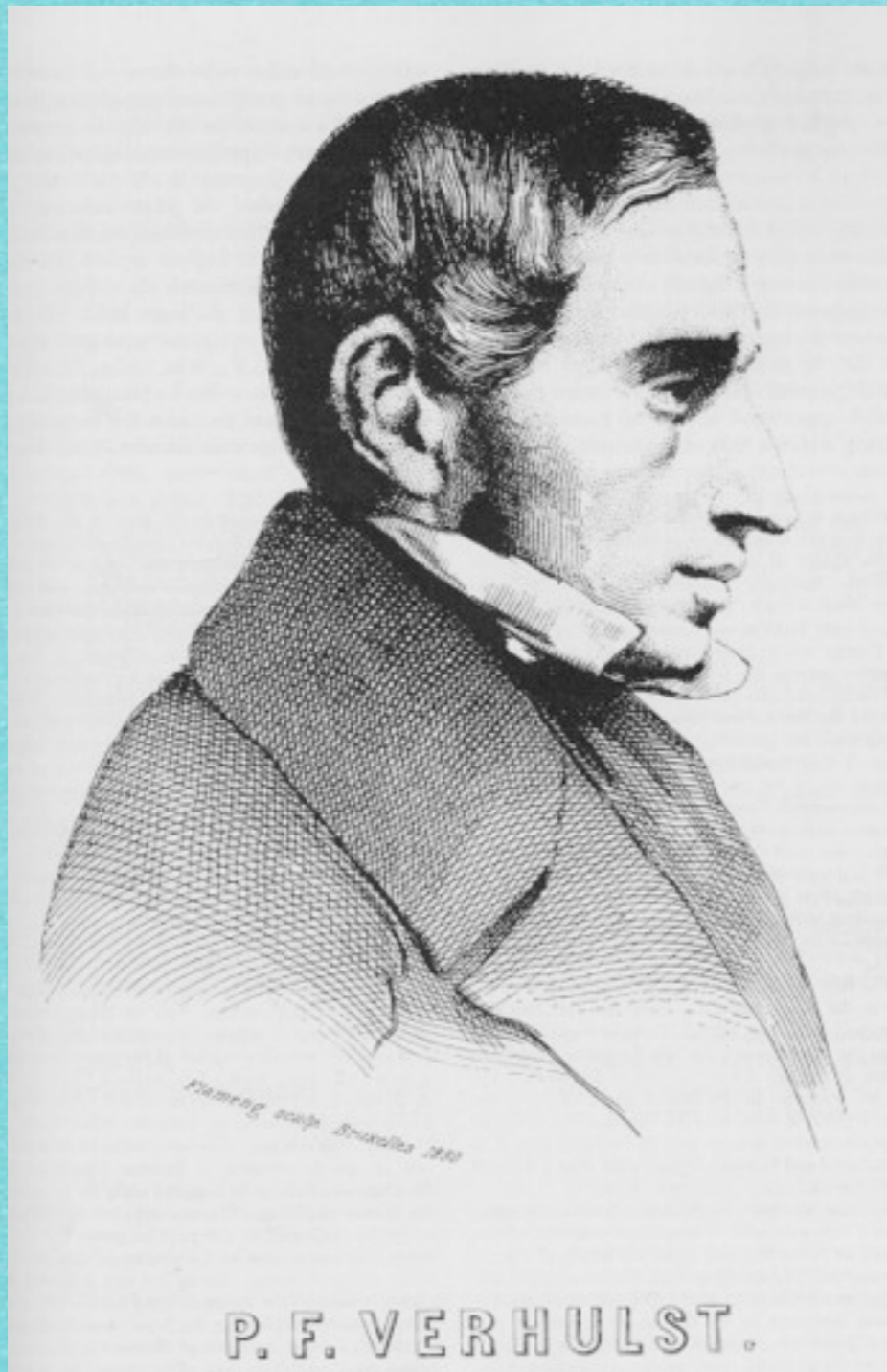
5.4.1 Logistische Rekursion

Exponentielles Wachstum:



Das geht nicht beliebig lange weiter!

5.4.1 Logistische Rekursion



Pierre-François Verhulst
(1804–1849)

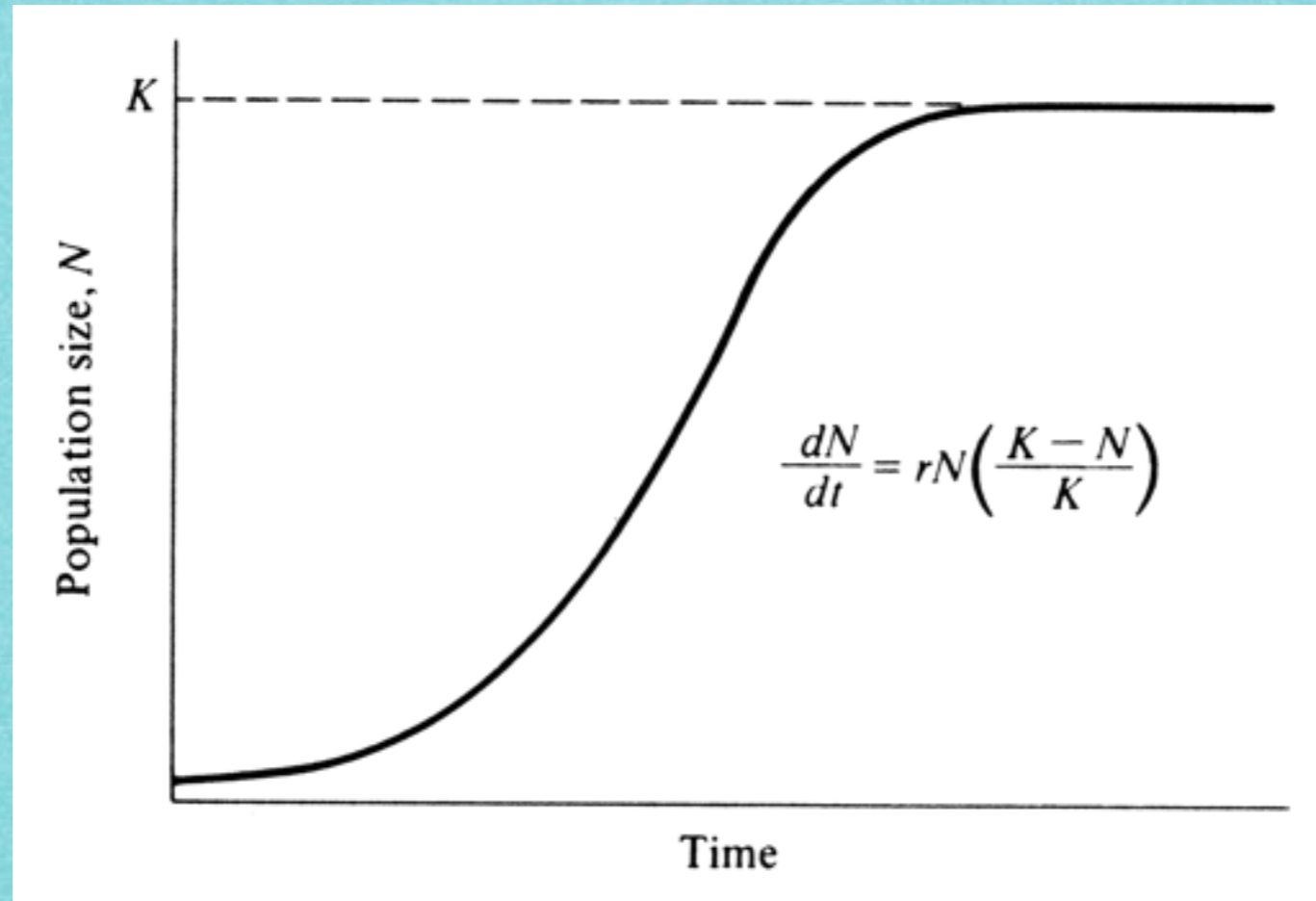
*Notice sur la loi que la population
poursuit dans son accroissement.*

In: *Corresp. Math. Phys.*, 10, 1838, S. 113–121

*“Notiz über das Gesetz,
das die Bevölkerung bei ihrem
Wachstum befolgt.”*

5.4.1 Logistische Rekursion

Verhulst ursprünglich: Stetiger Prozess!



**In Populationsdynamik beobachtet:
Diskreter Prozess!**

5.541 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

Zusammen:

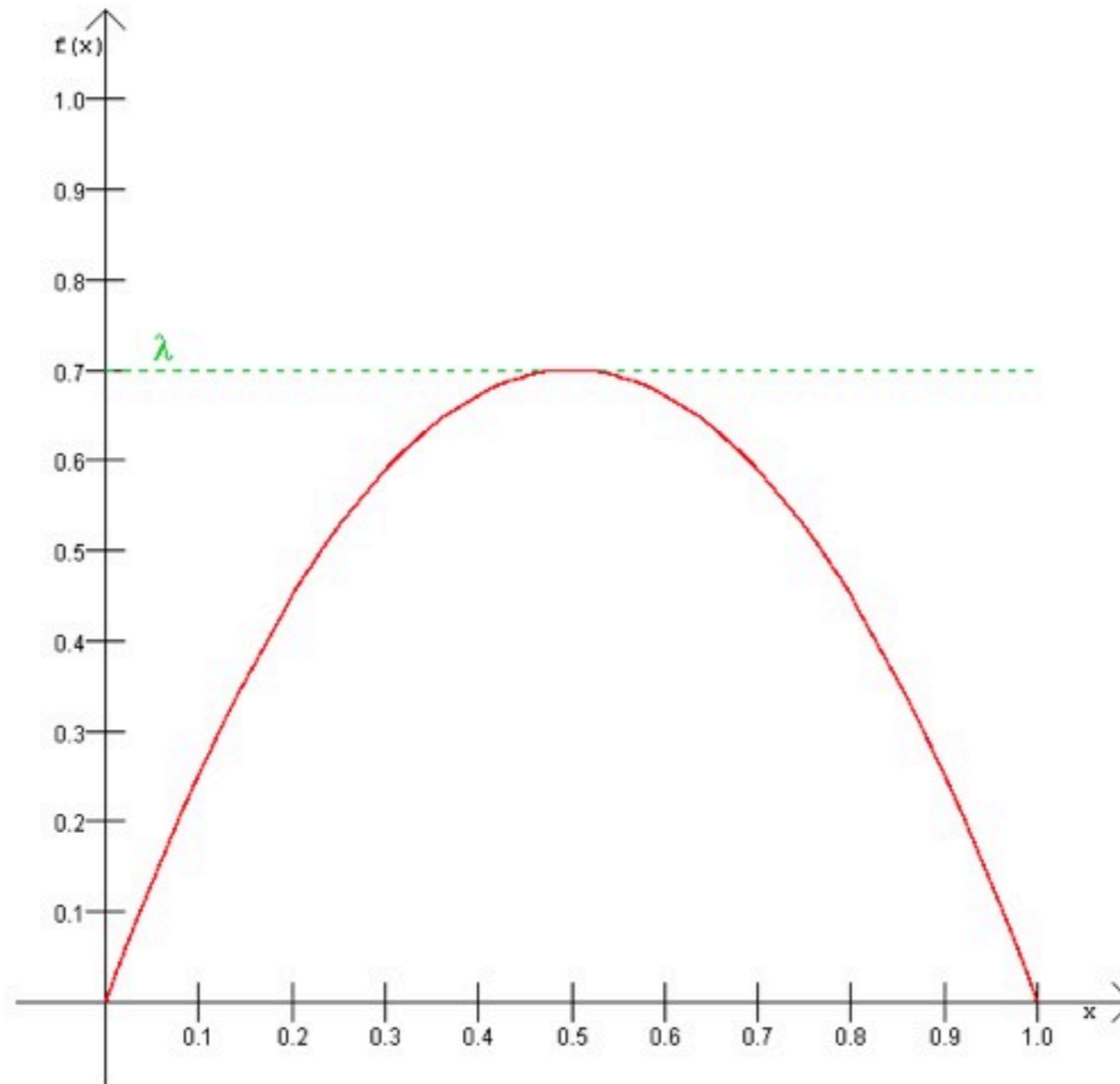
$$x_{n+1} = q_f q_v x_n (G - x_n)$$

Normiert:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

5.4.1 Logistische Rekursion

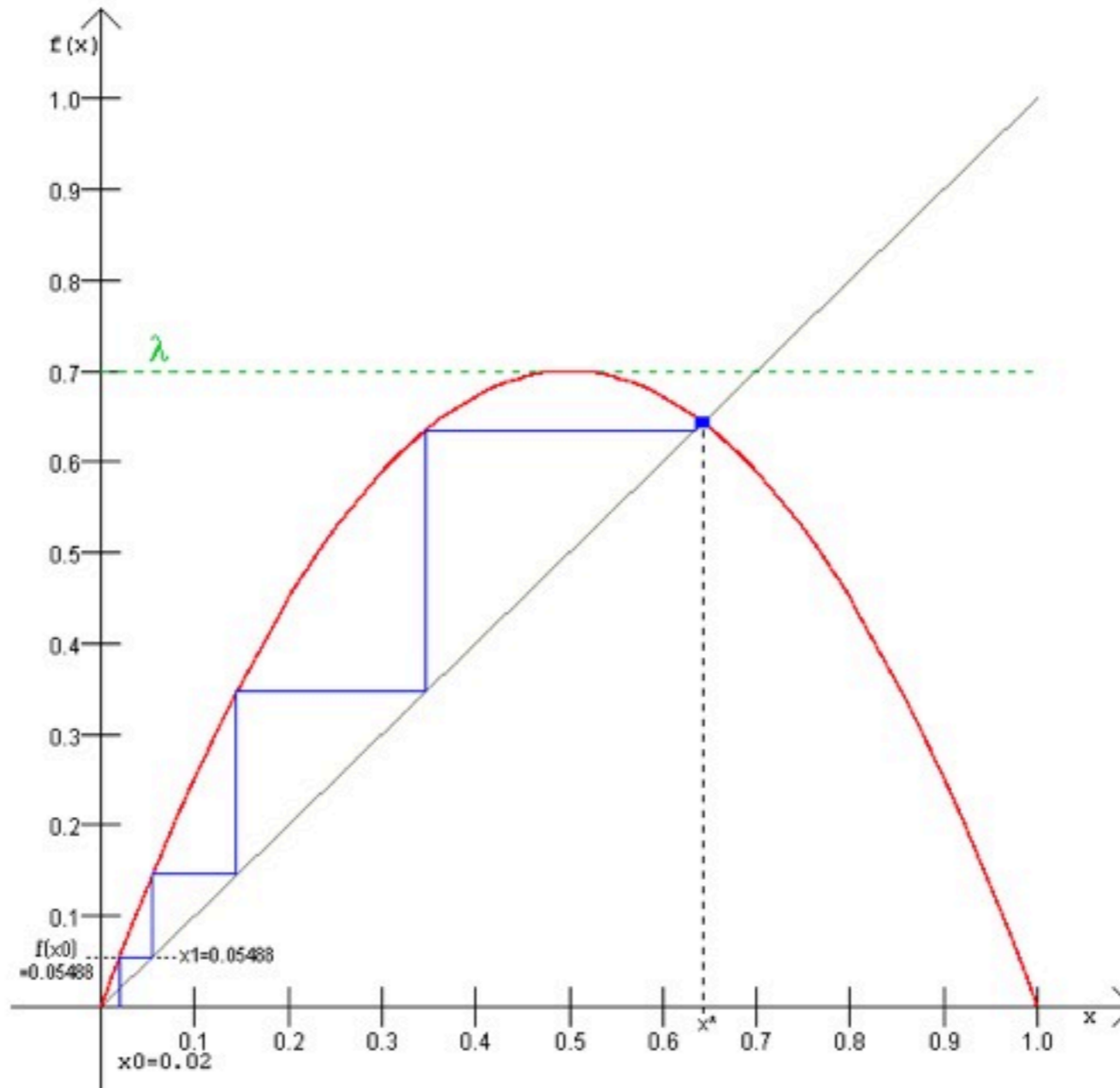
Bildlich:



5.4.1 Logistische Rekursion

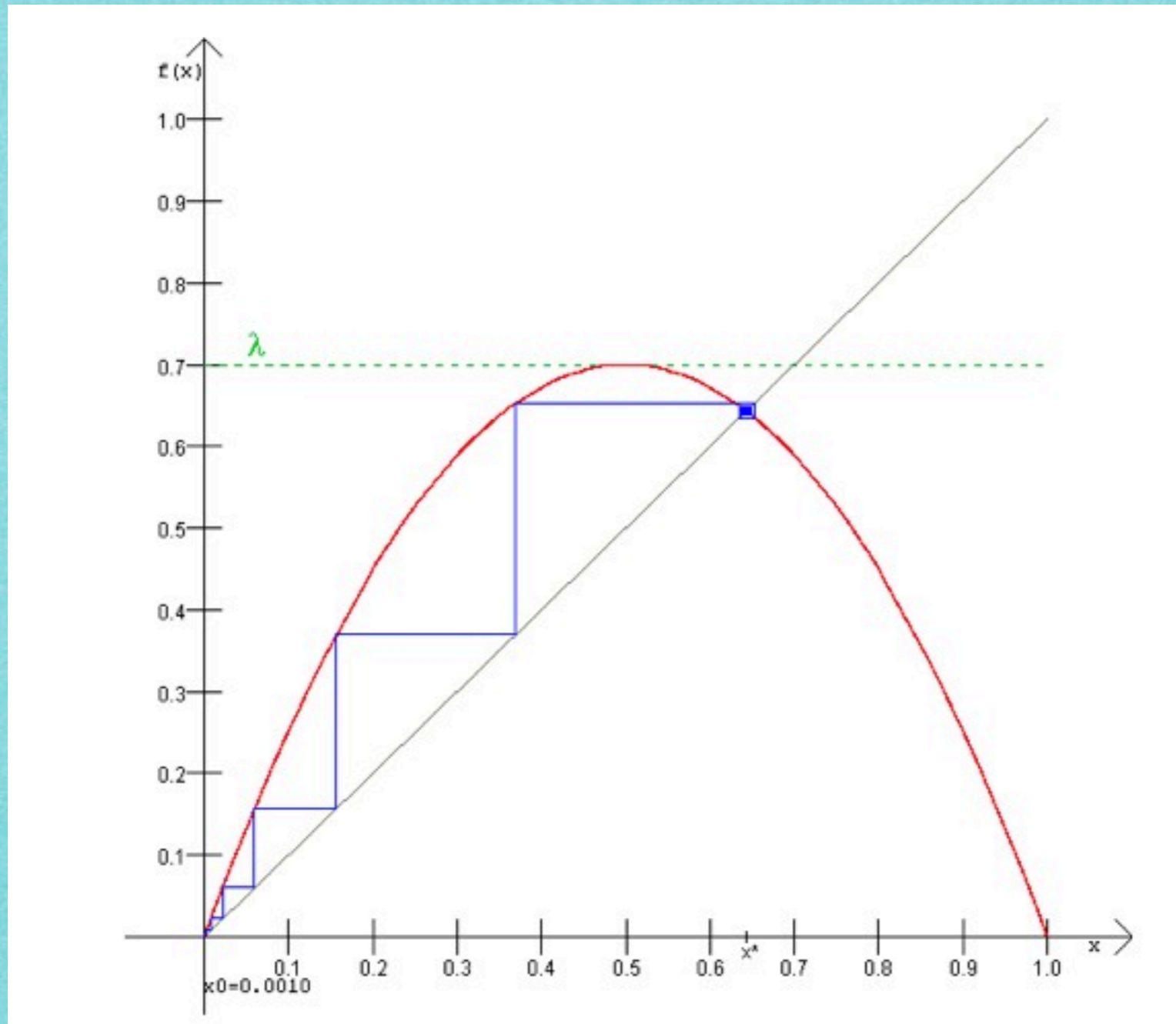
Rekursion:

x_n	$f(x_n) = x_{n+1}$
1	0.05488
2	0.14523092
3	0.34758892
4	0.63495841
5	0.64900143
6	0.63783600
7	0.64680346
8	0.63965648
9	0.64538899
10	0.64081372
11	0.64448019
12	0.64155133
13	0.64389702
14	0.64202221
15	0.64352313
16	0.64232311
17	0.64328357
18	0.64251549
19	0.64313014
20	0.64263854



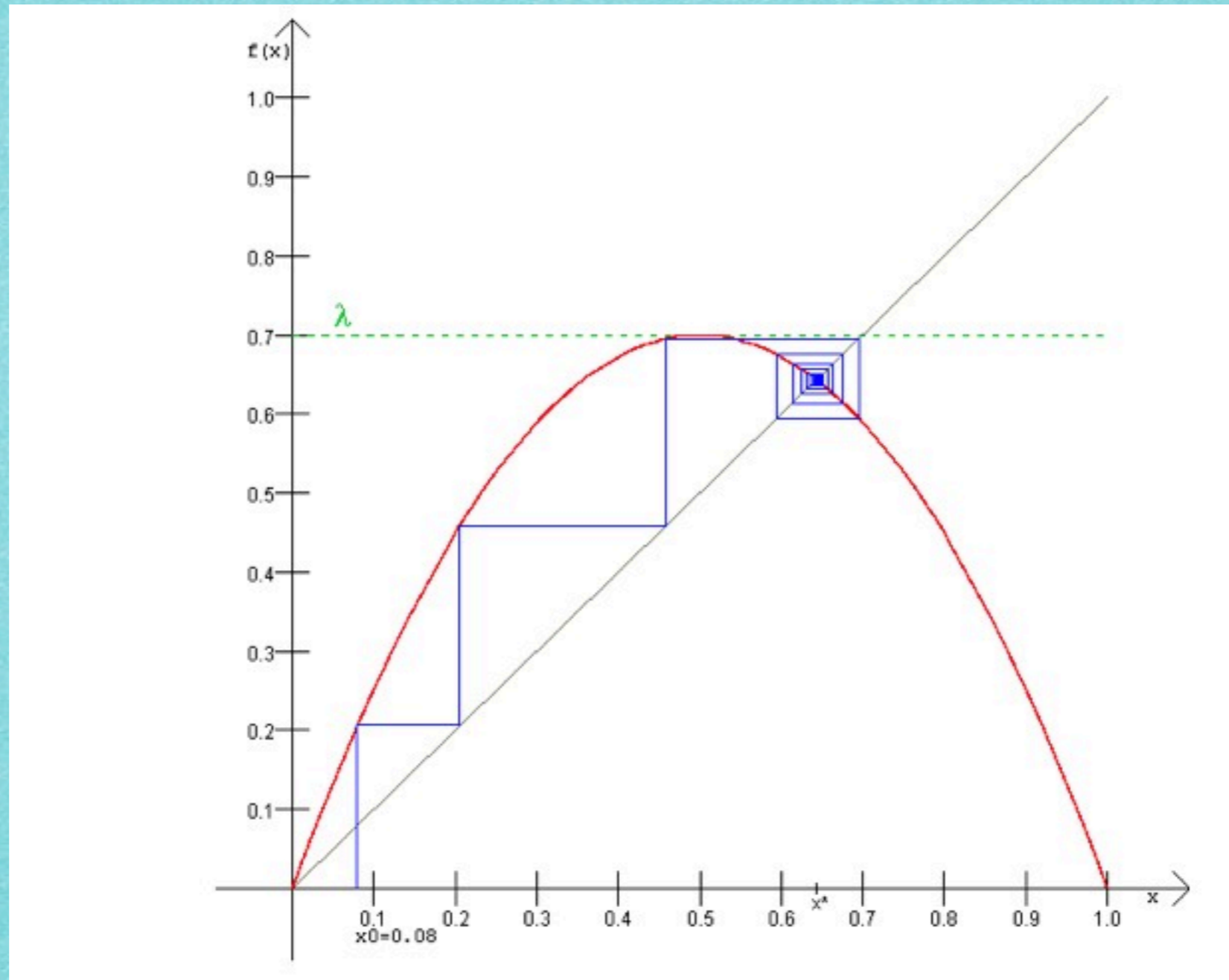
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



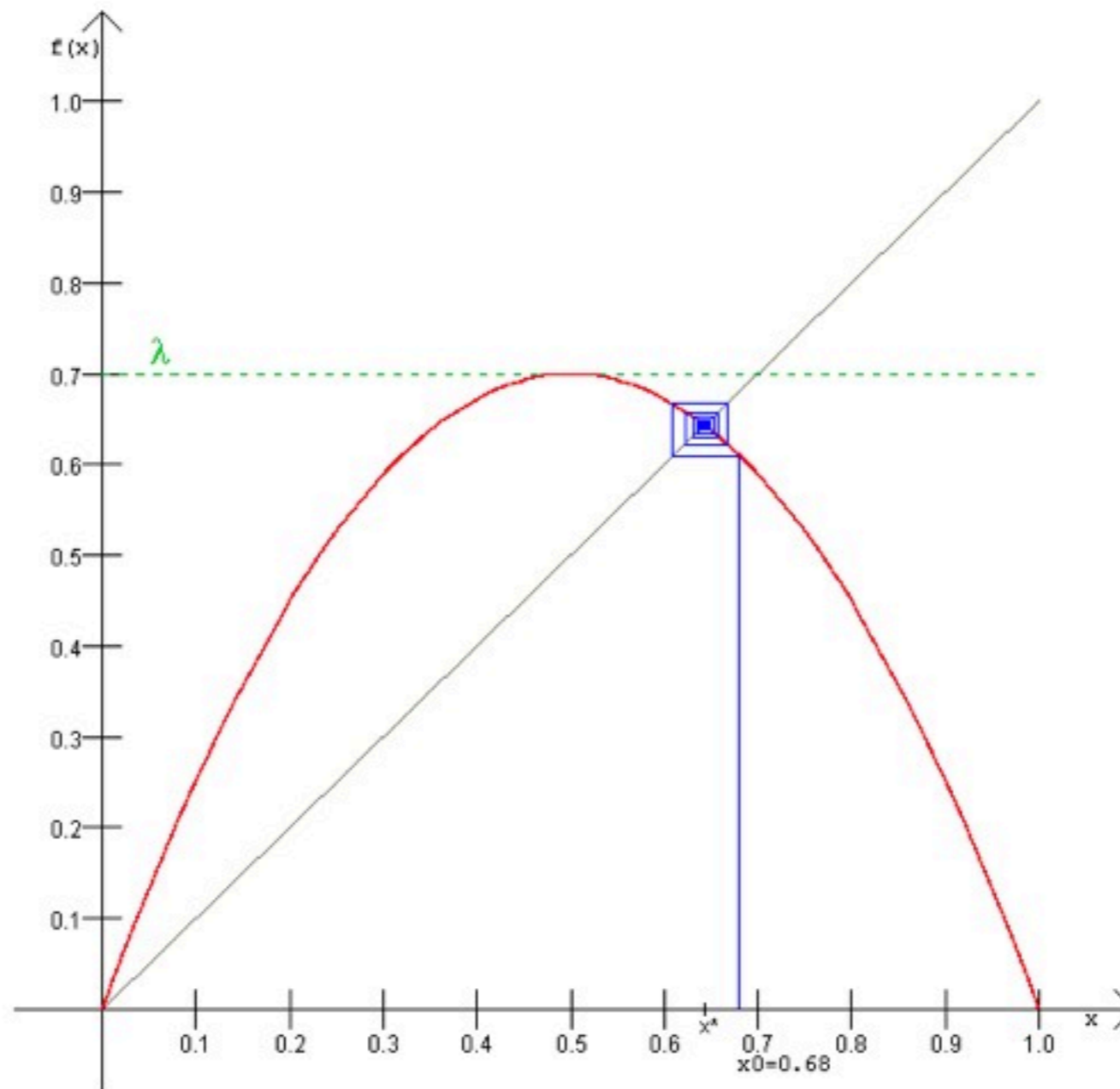
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



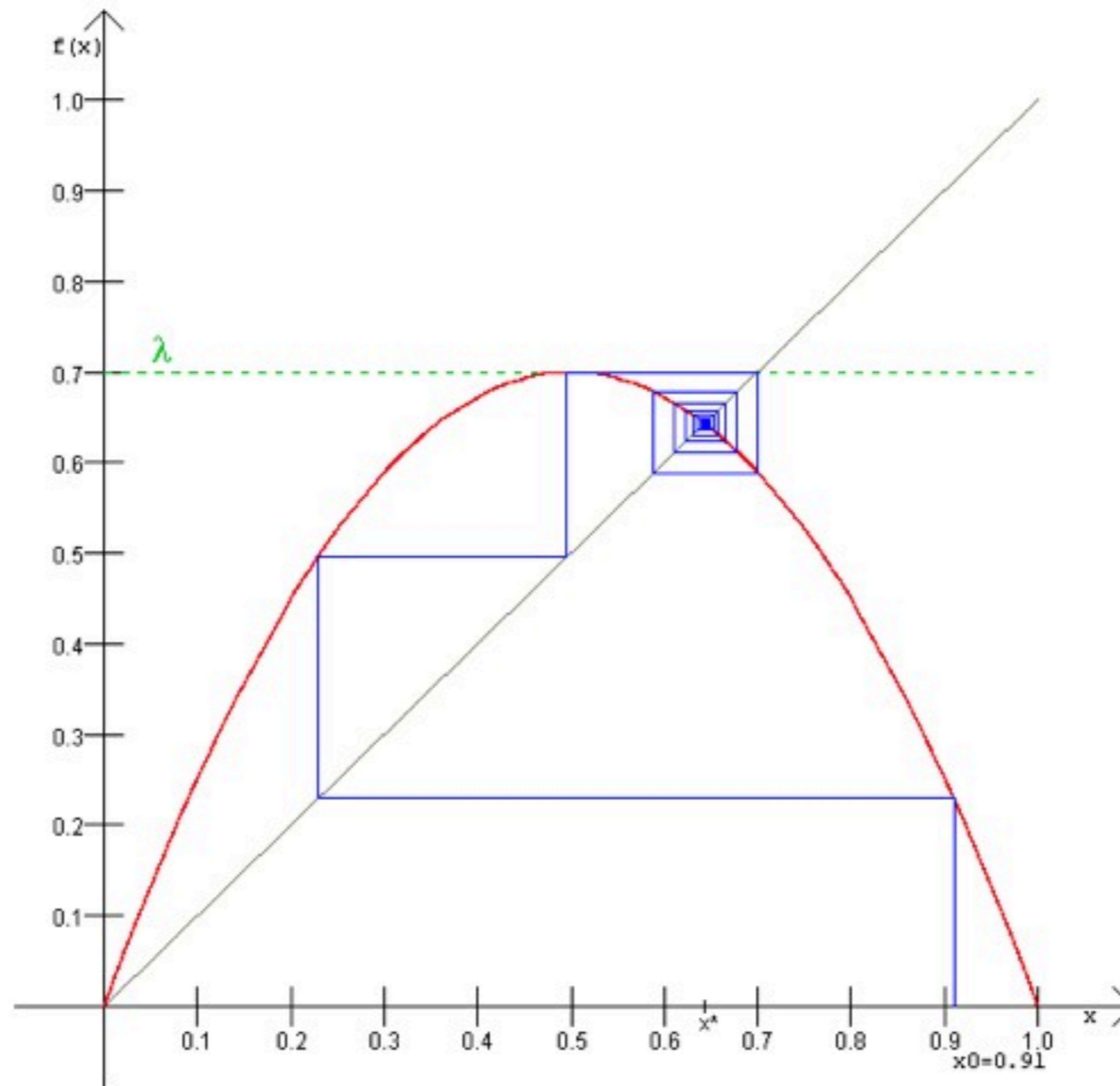
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



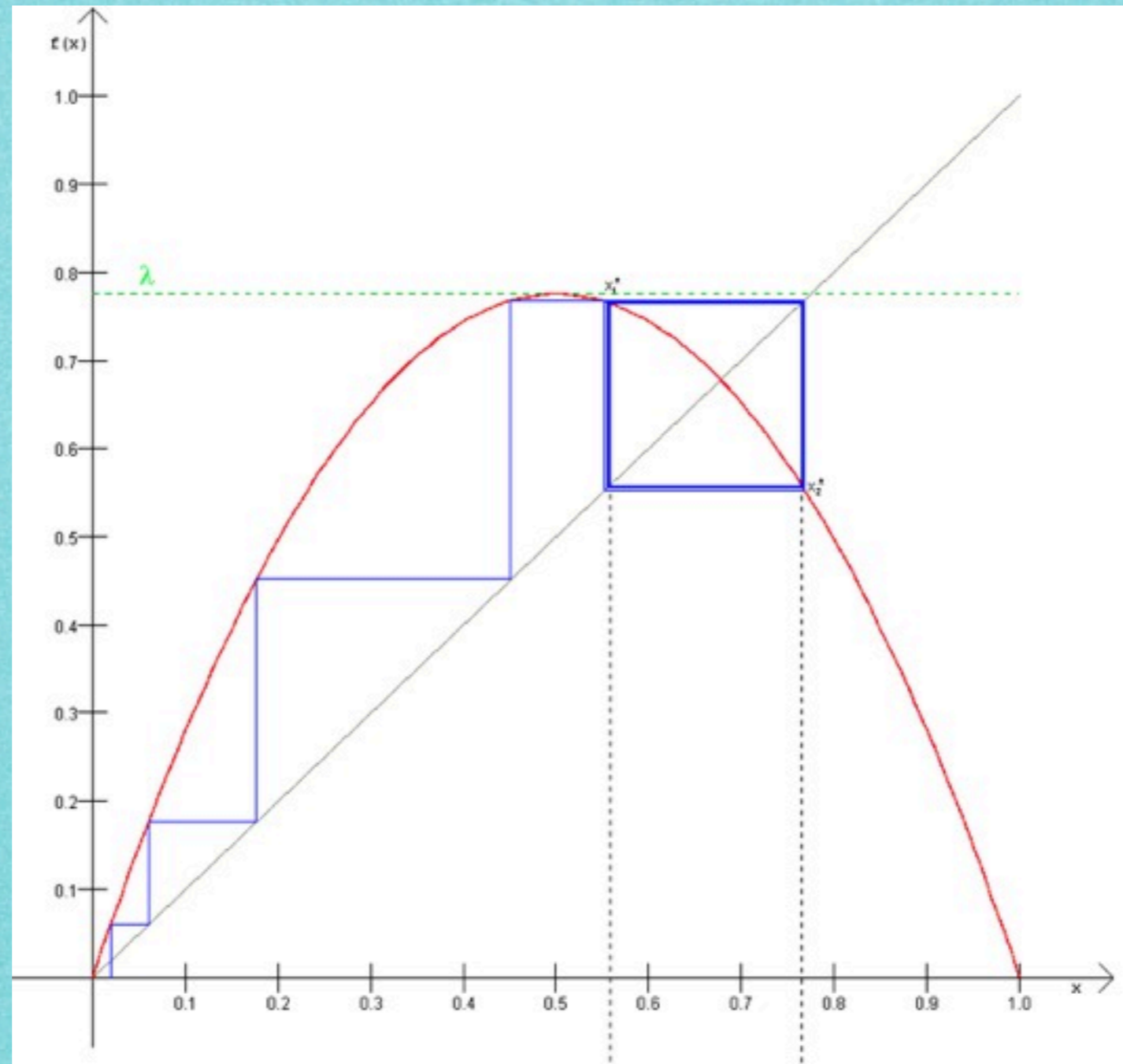
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



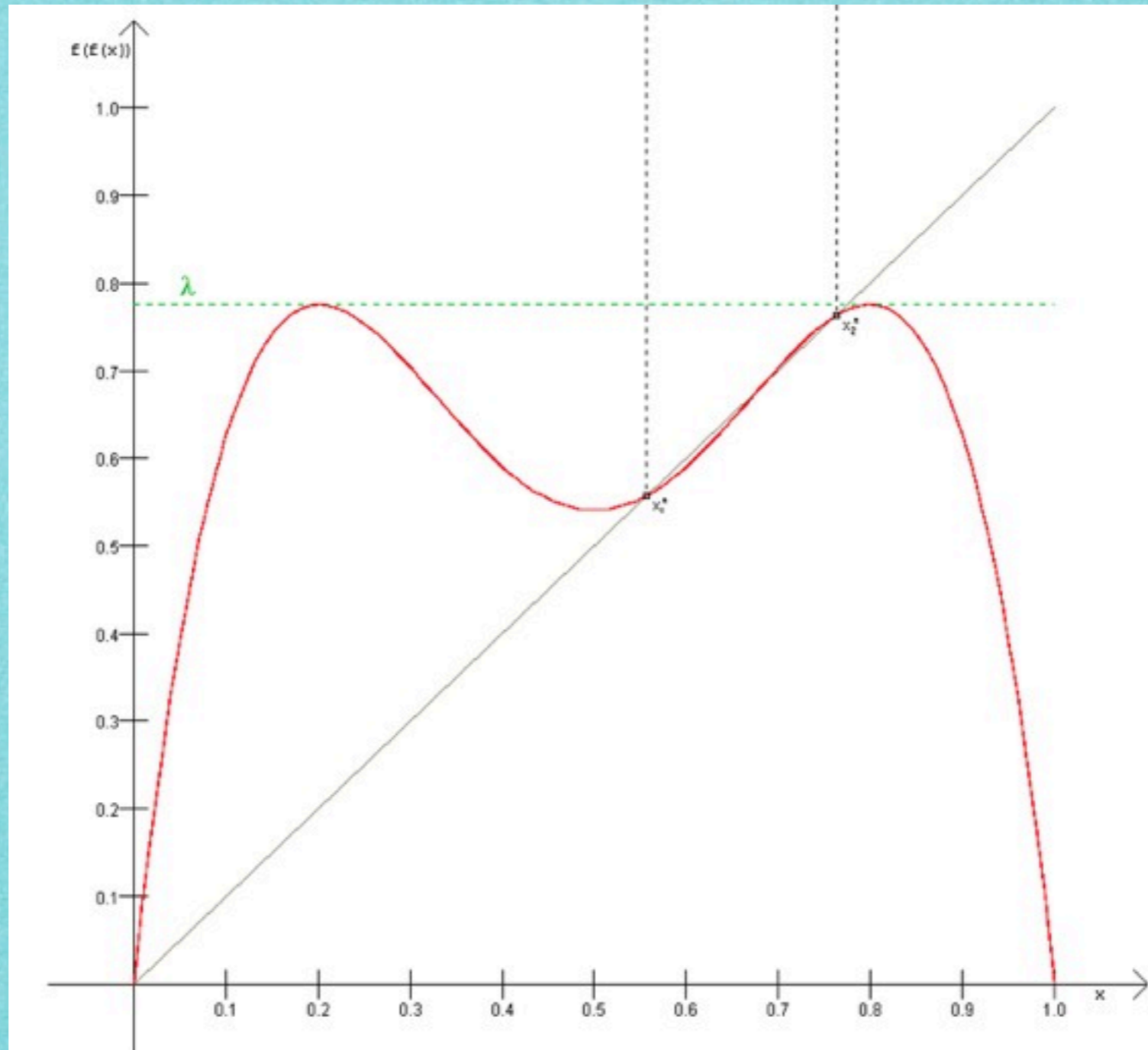
5.4.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



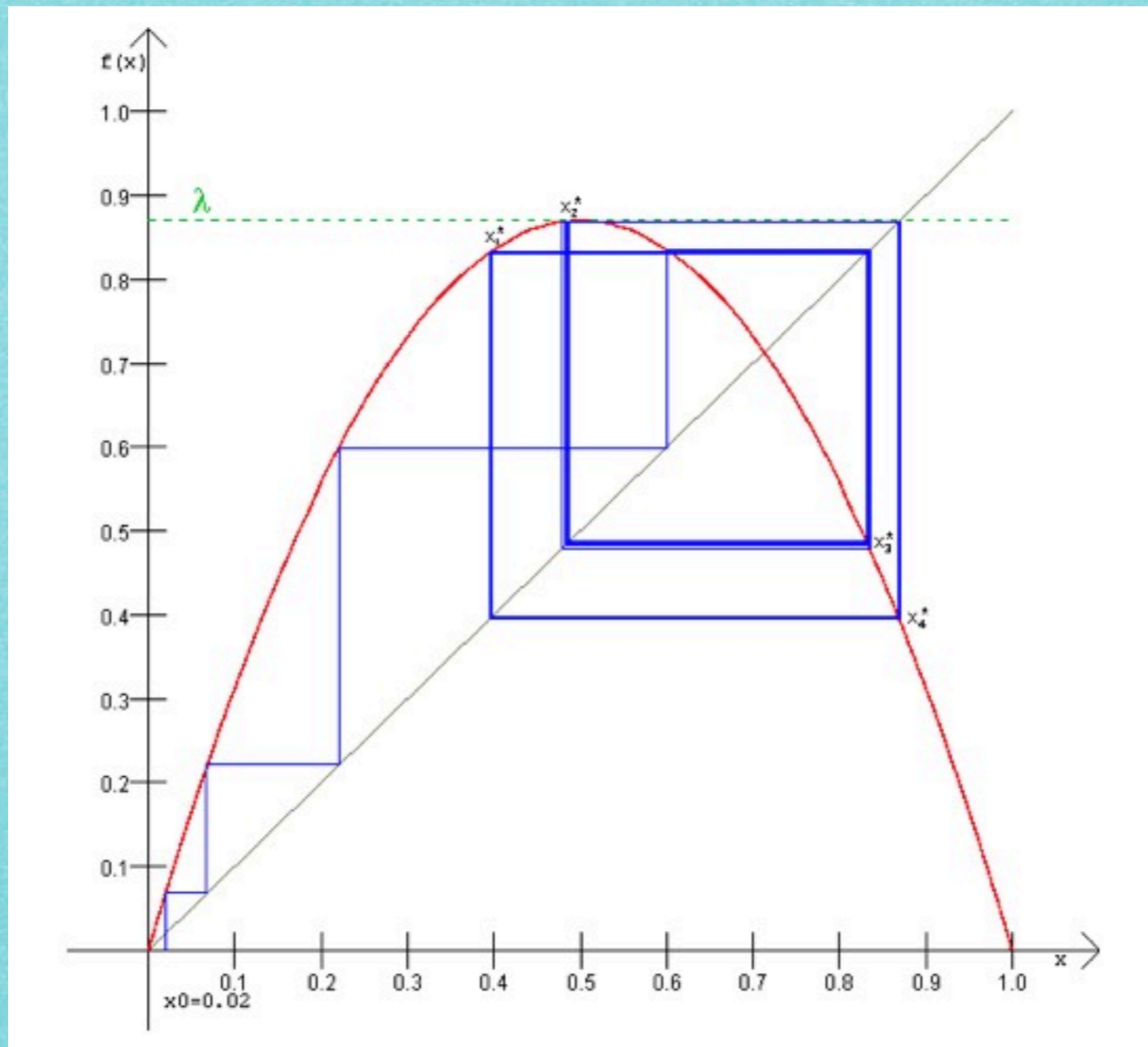
5.4.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



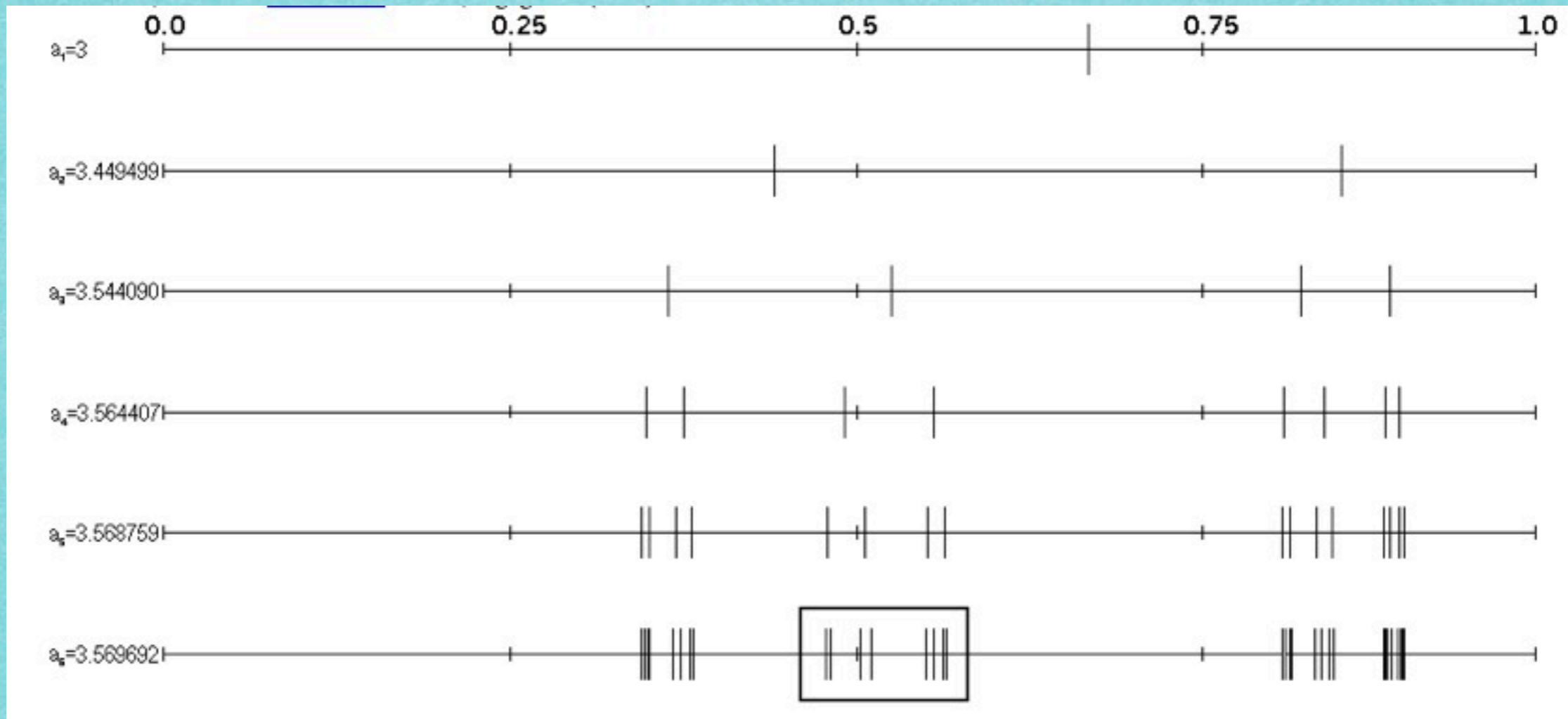
5.4.1 Logistische Rekursion

Vier Fixpunkte!



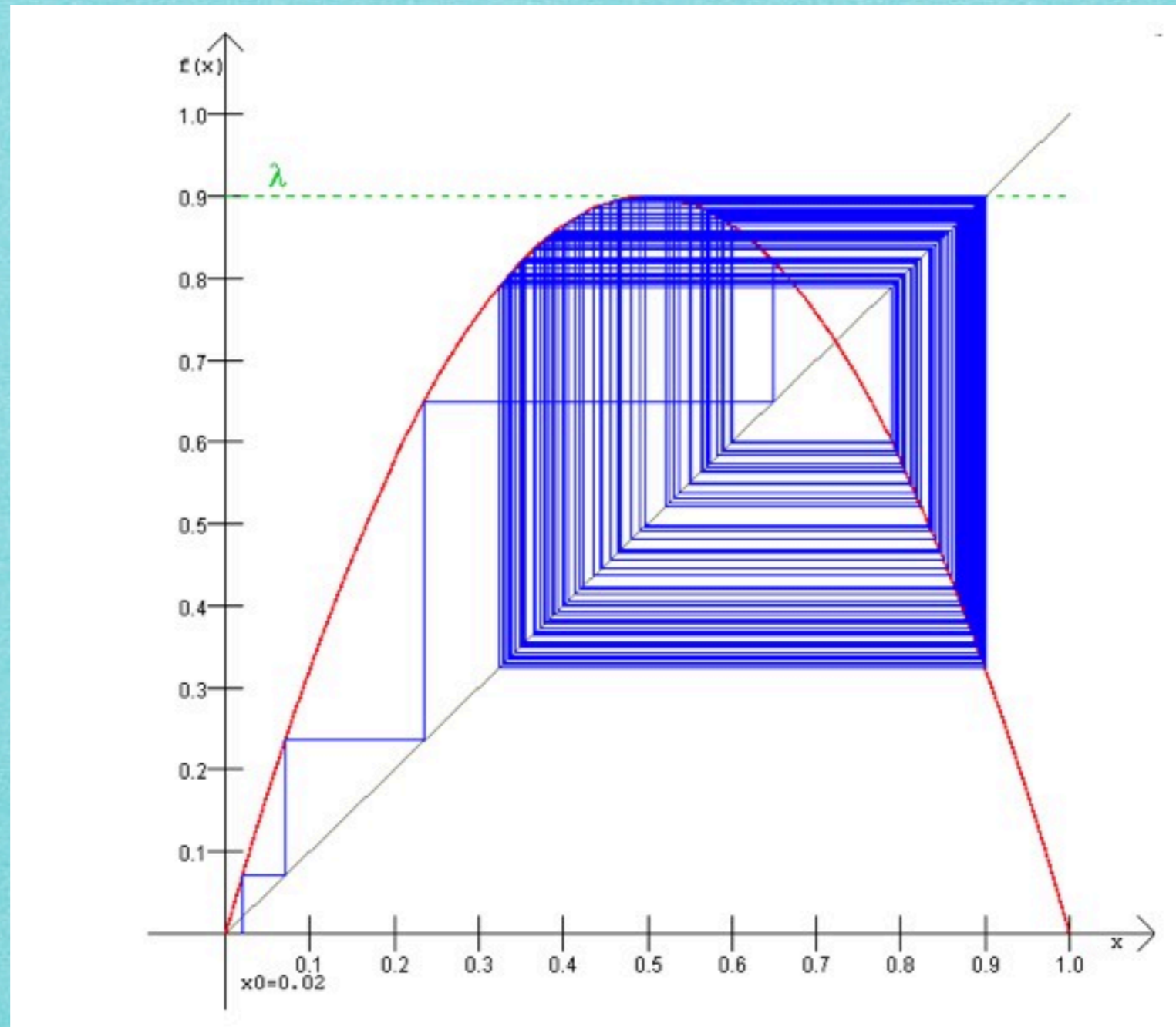
5.4.1 Logistische Rekursion

Entwicklung der Fixpunkte:



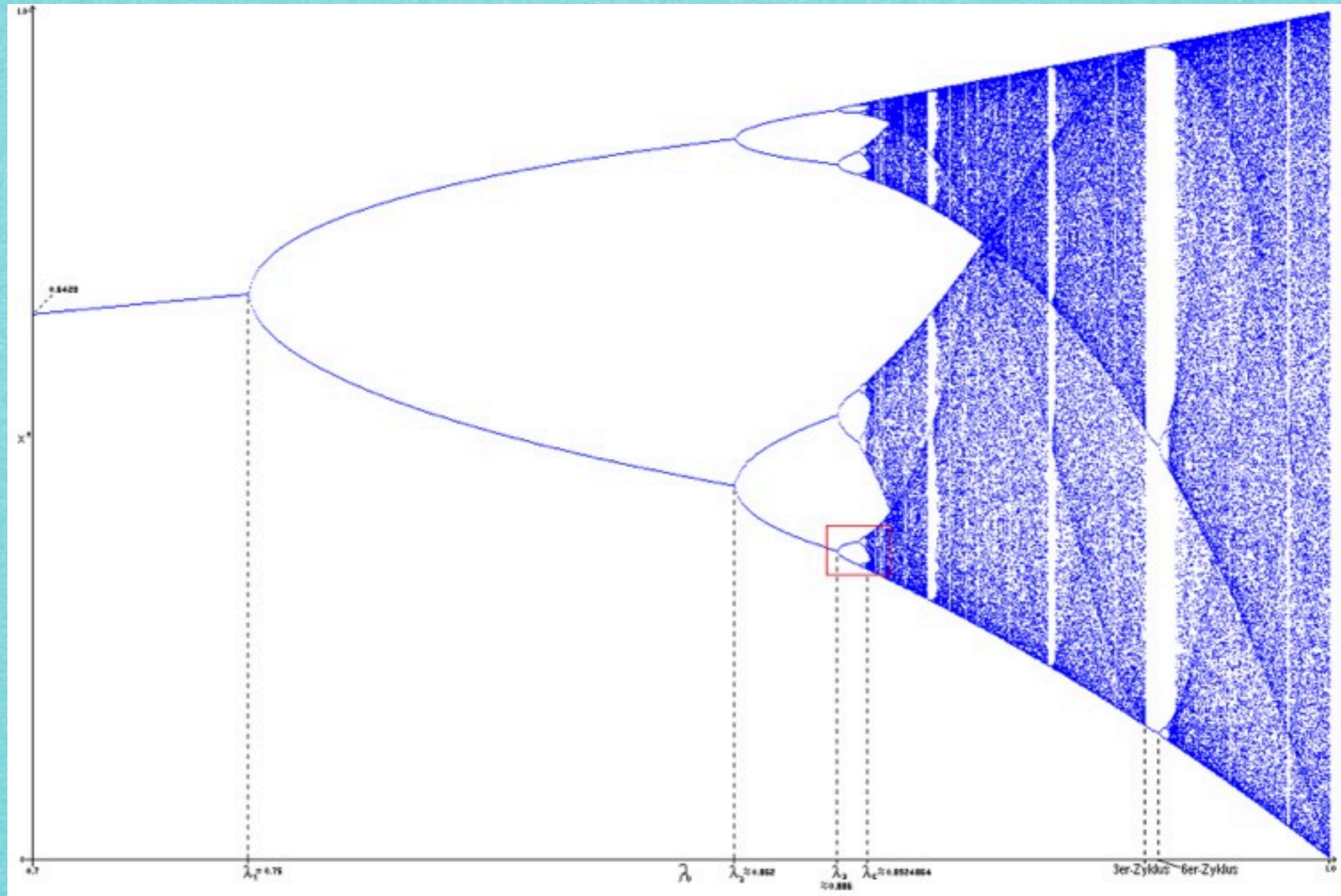
5.4.1 Logistische Rekursion

**Keinerlei Fixpunkte -
deterministisches Chaos:**



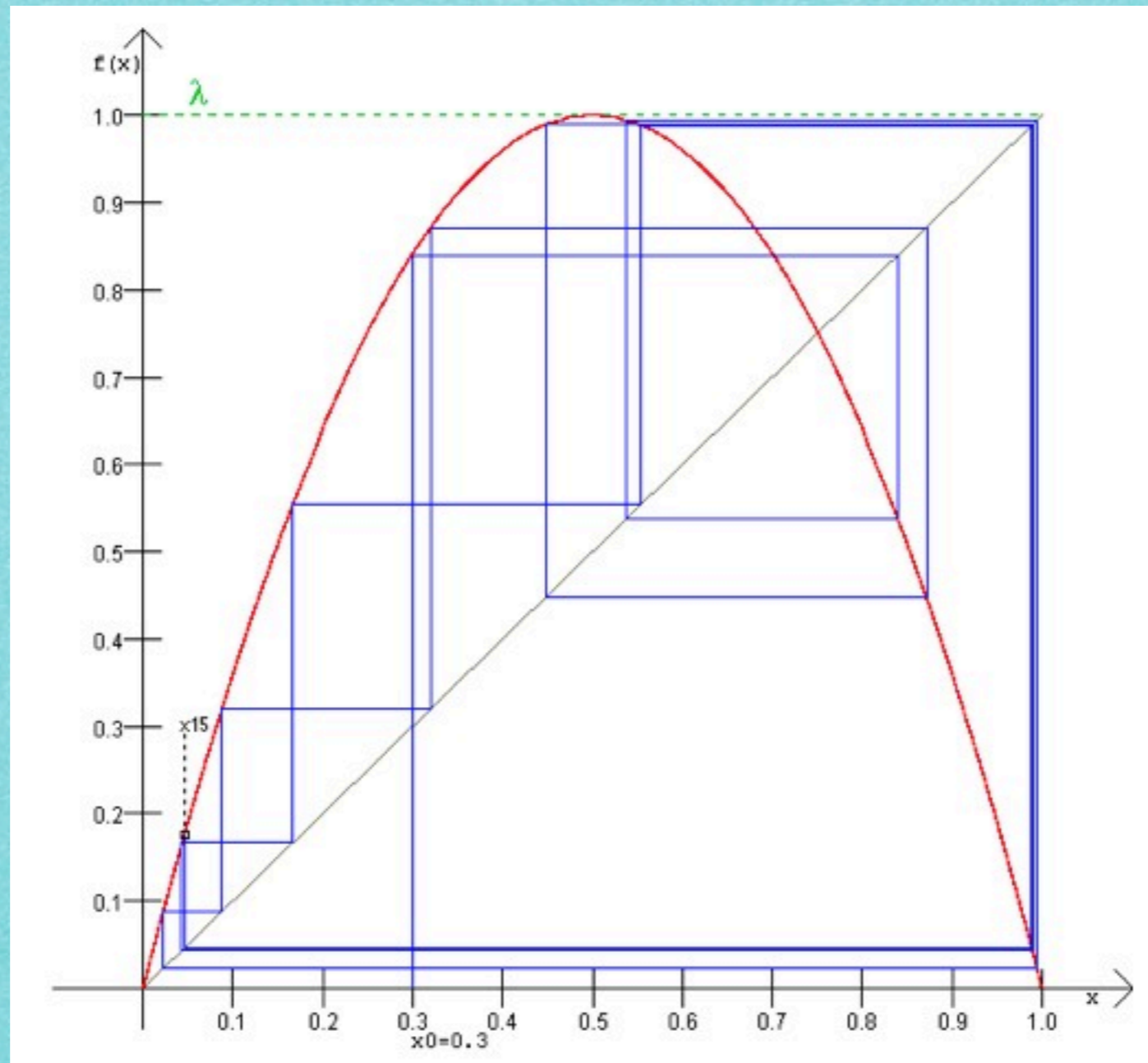
5.4.1 Logistische Rekursion

Bifurkationsdiagramm:



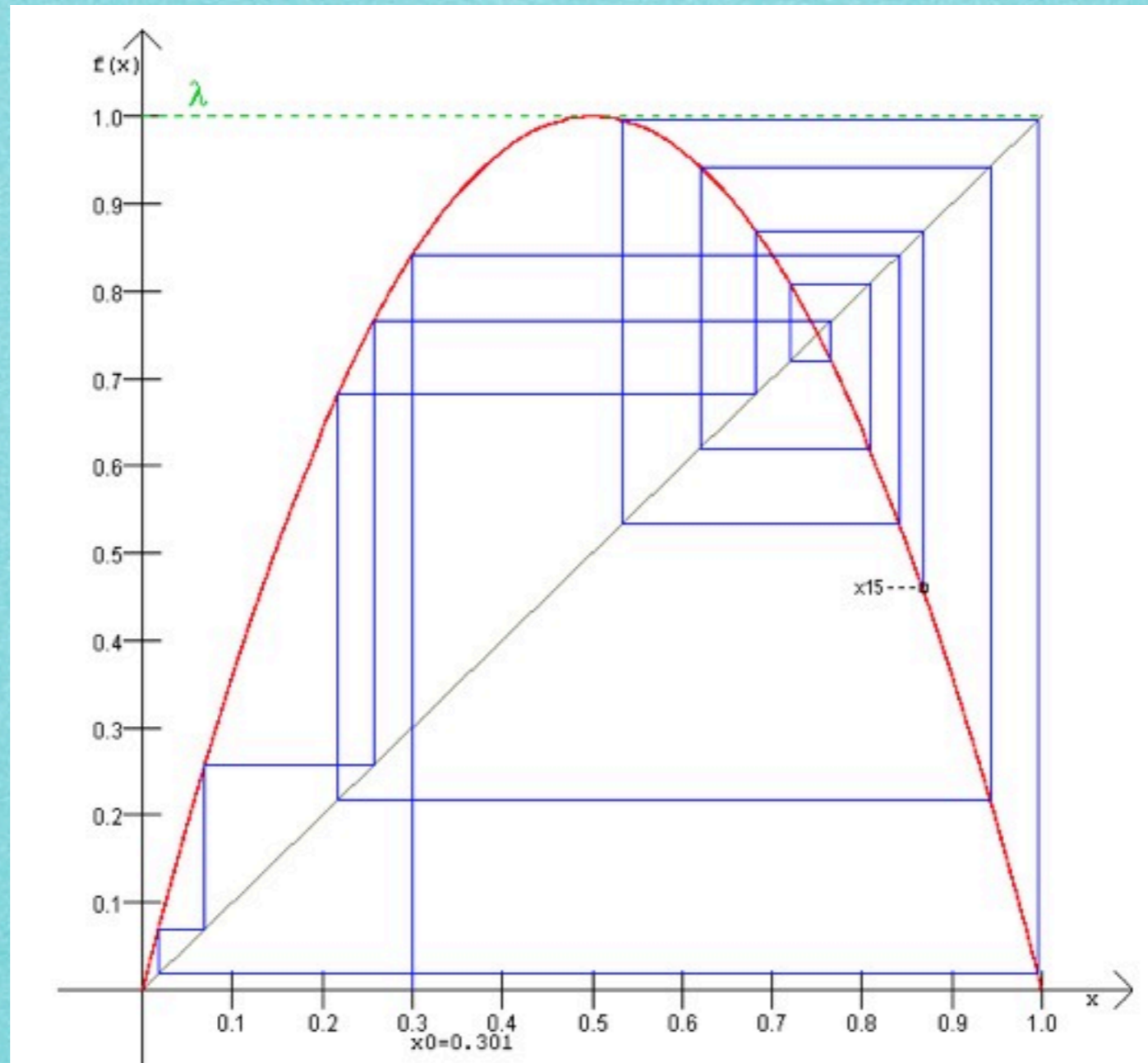
5.4.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



5.4.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



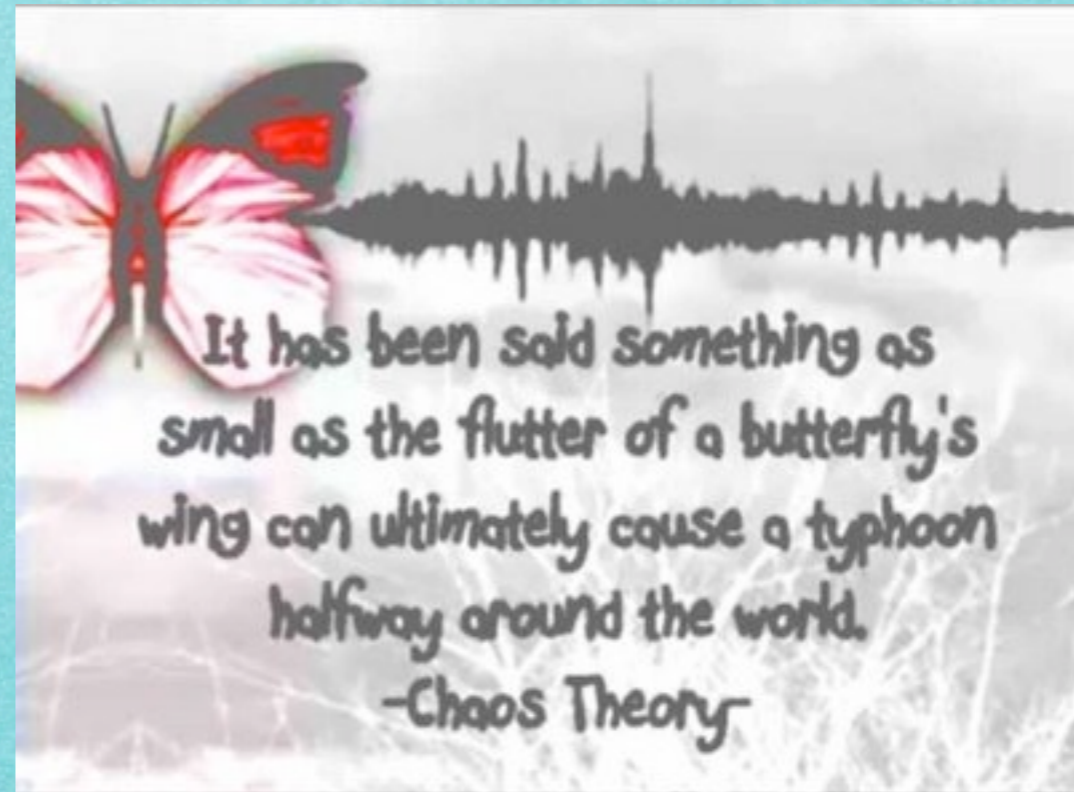
5.4.1 Logistische Rekursion



Edward Lorenz
(1917–2008)

Grenzen der Kausalität!

Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?



54.2 Frühkindliche Bildung



Pappbilderbuch, 16 Seiten
erschienen 1993

Nur wer viel spricht, lernt sprechen! Entsprechend schnell wachsen Sprachverständnis und Wortschatz von Kleinkindern, je mehr Gelegenheit Eltern ihnen zum Üben geben. Die Bilderbücher von Helmut Spanner eignen sich hervorragend zur spielerischen Sprachförderung, denn durch Zeigen und Benennen von Alltagsgegenständen wird der passive Wortschatz in aktiv nutzbare Wörter umgewandelt. Mehr als 250 Dinge, die Kindern ab einem Jahr vertraut sind, wurden hier, nach Themen geordnet, auf großen Doppelseiten zusammengestellt. Ab und zu entdeckt man auch einen kleinen Bären oder ein Mäuschen, die mit den Dingen spielen.

[>> Lesermeinungen zu diesem Buch](#)



54.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_0 = 0$$

Für welche Werte c bleibt das beschränkt?

$$c = -2 : 0, -2, 2, 2, \dots$$

$$c = 1/4 : 0, 0.25, 0.3125, 0.3476, 0.3708, 0.3875, 0.4001, 0.4101, \dots$$

Man kann das auf die logistische Iteration abbilden...

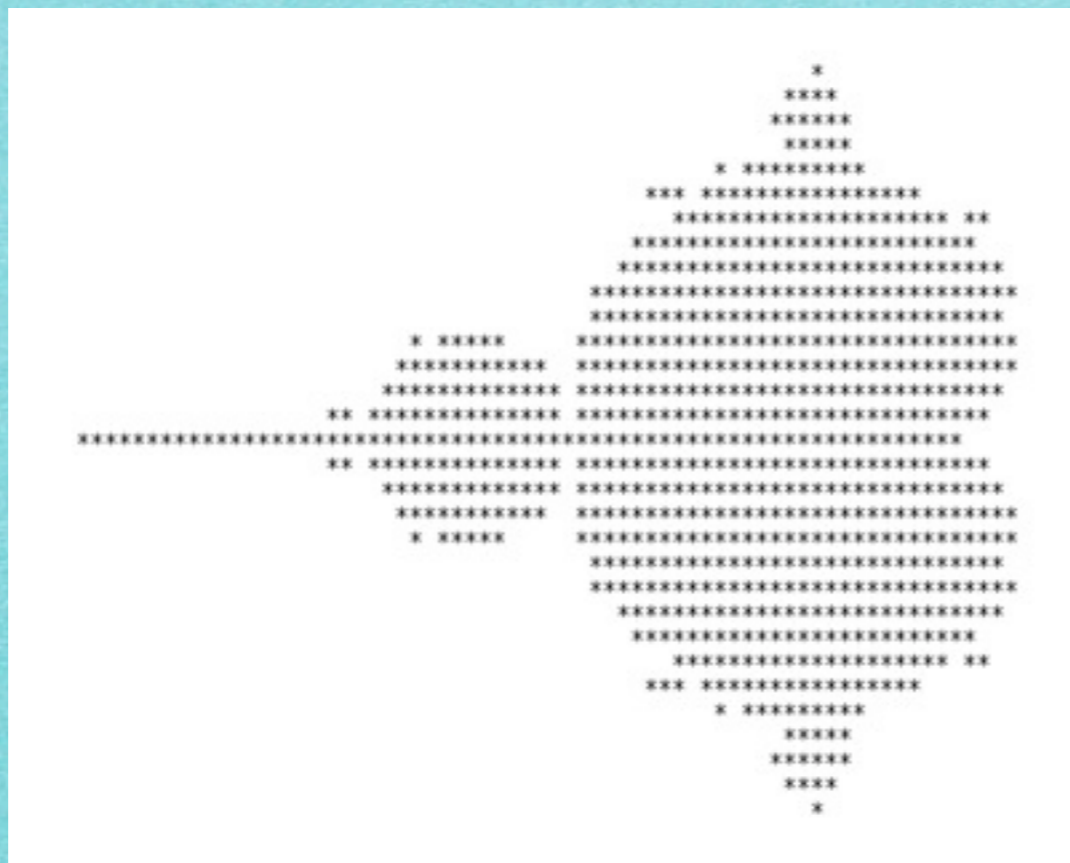
5.4.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

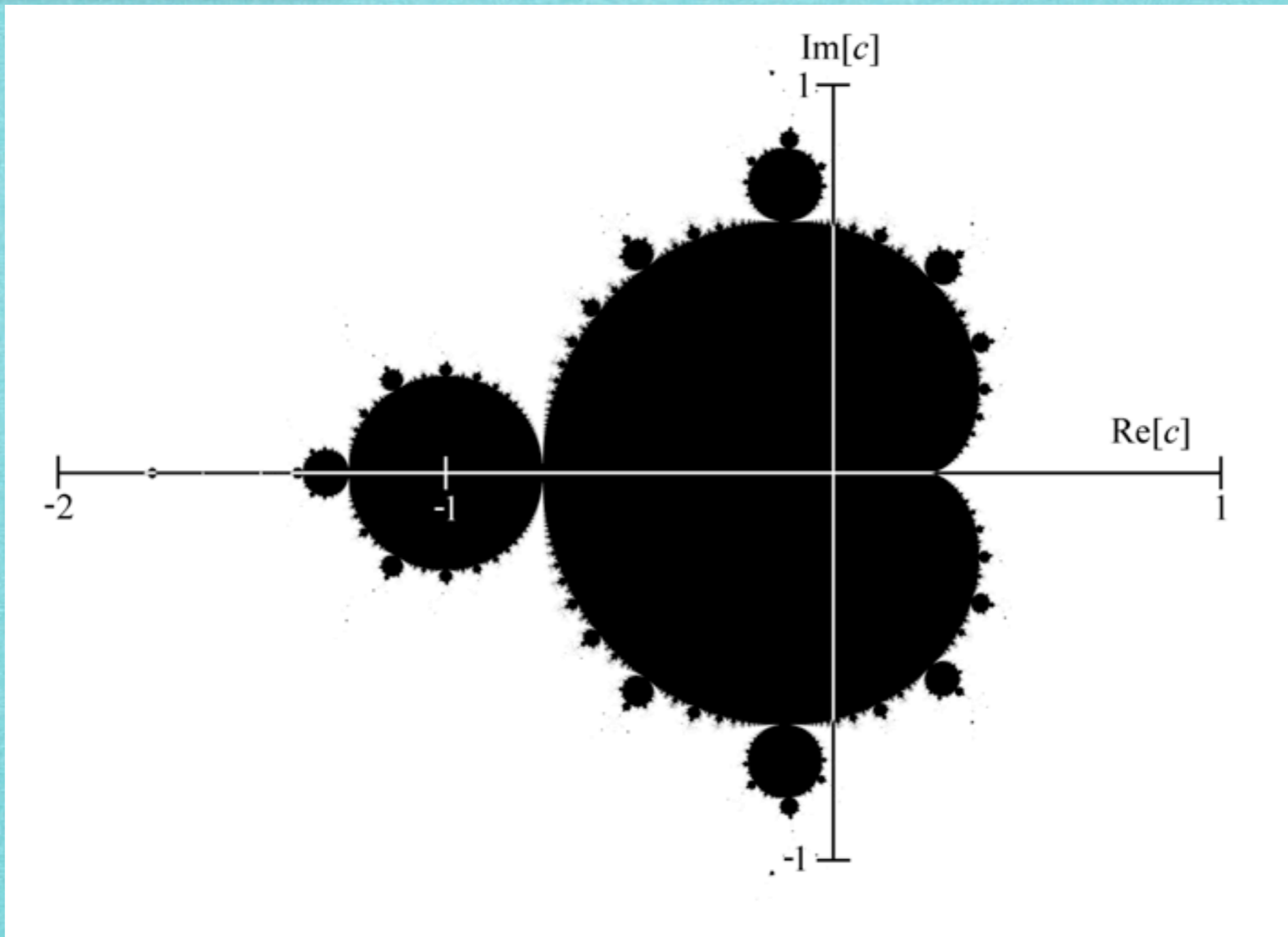
Für welche *komplexen* Werte c bleibt das beschränkt?



Brooks & Matelsky
(1978)

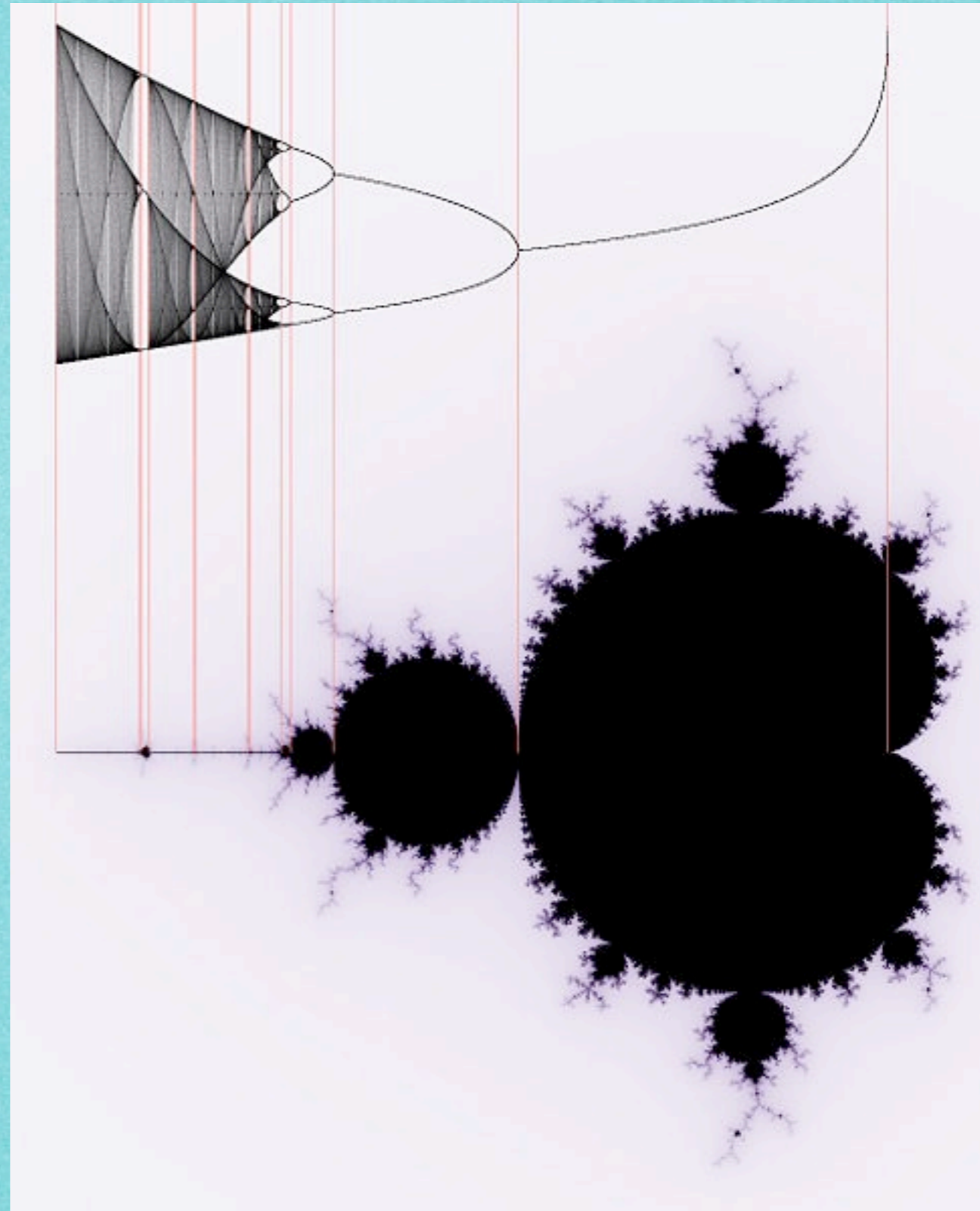
54.2 Die Mandelbrotmenge

Besser aufgelöst:



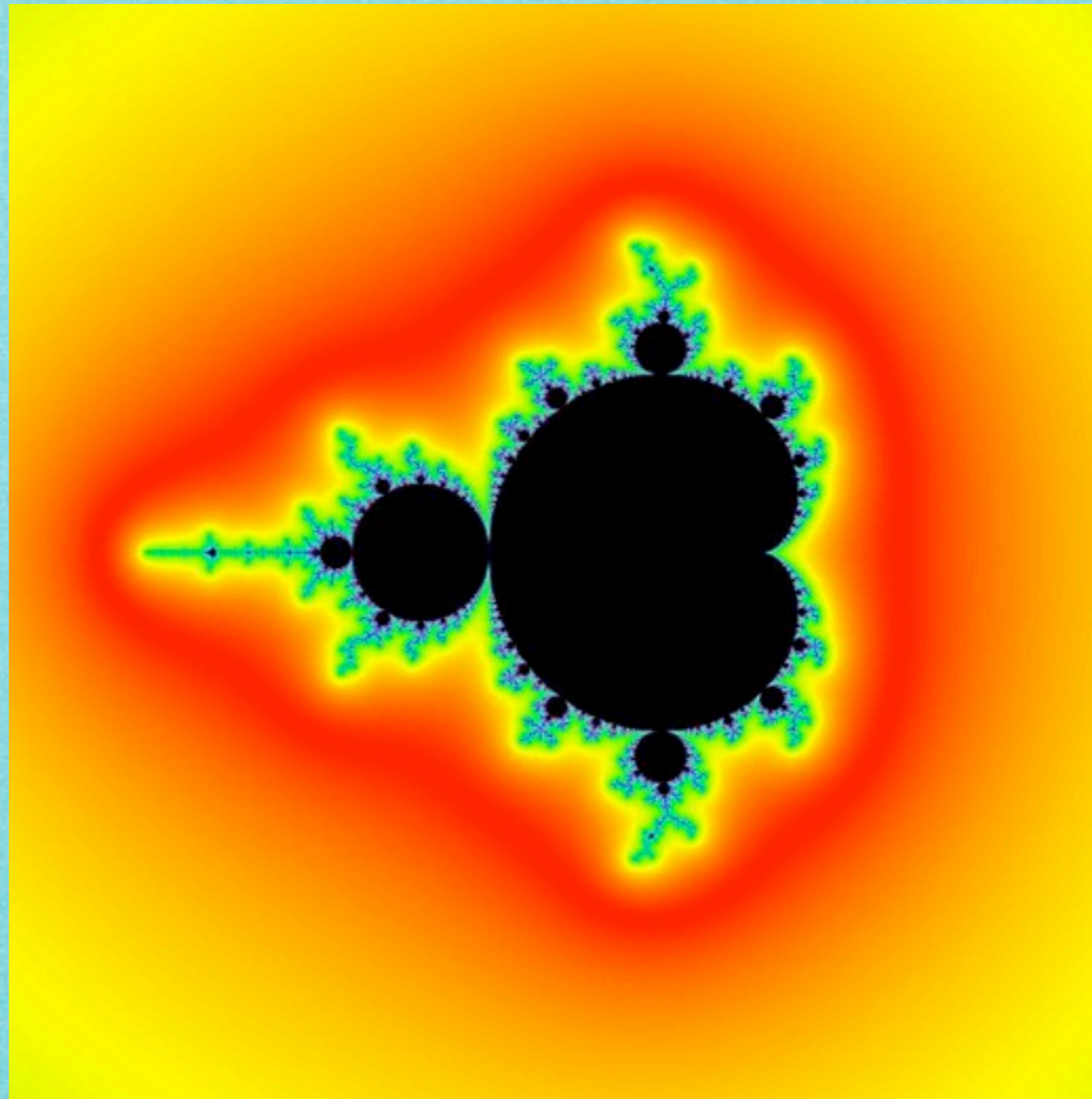
54.2 Die Mandelbrotmenge

Realteil auf die
logistische Iteration
abgebildet:



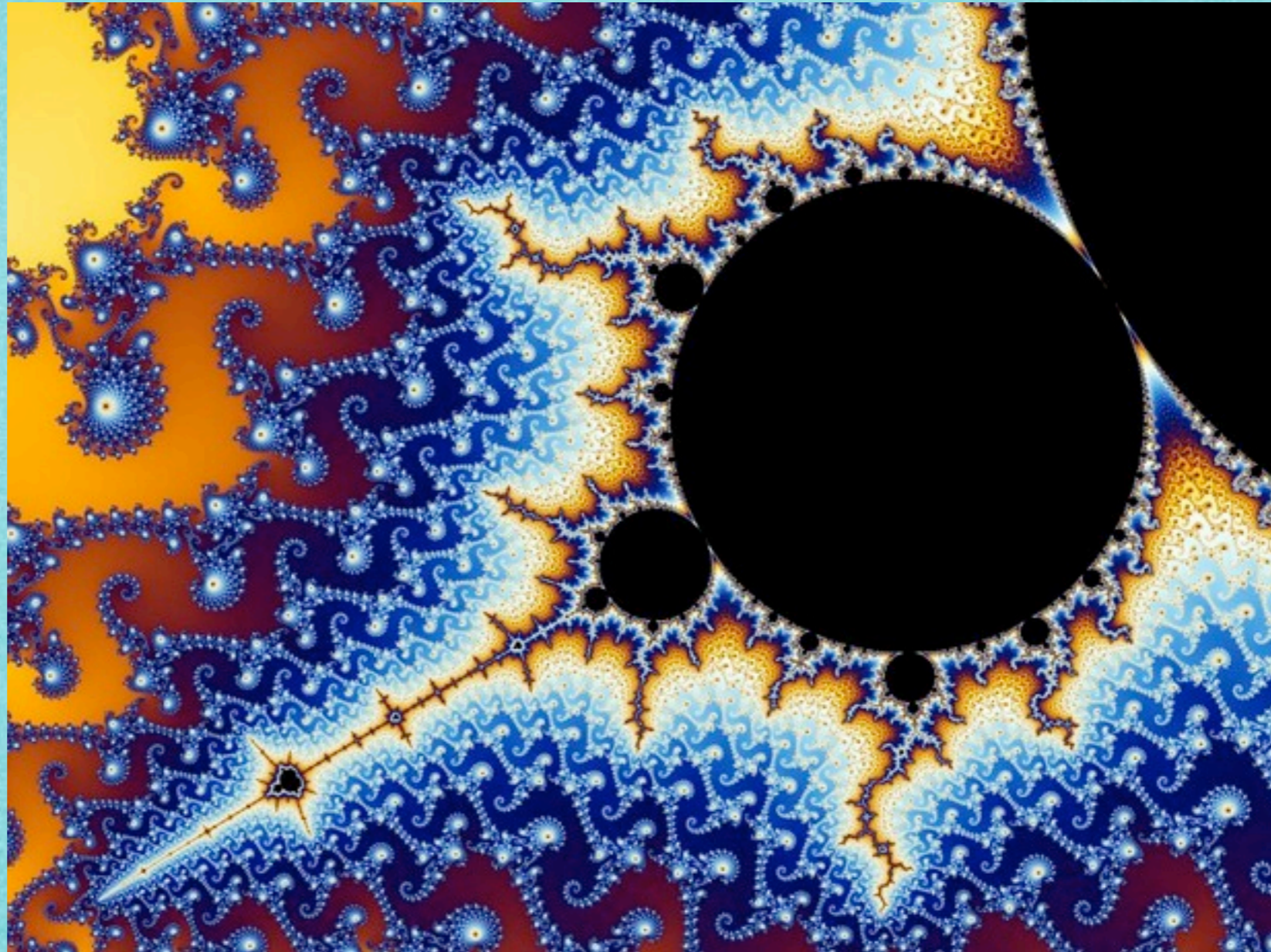
54.2 Die Mandelbrotmenge

Farbig:



5.4.2 Die Mandelbrotmenge

Ausschnitt:



-> Filme!

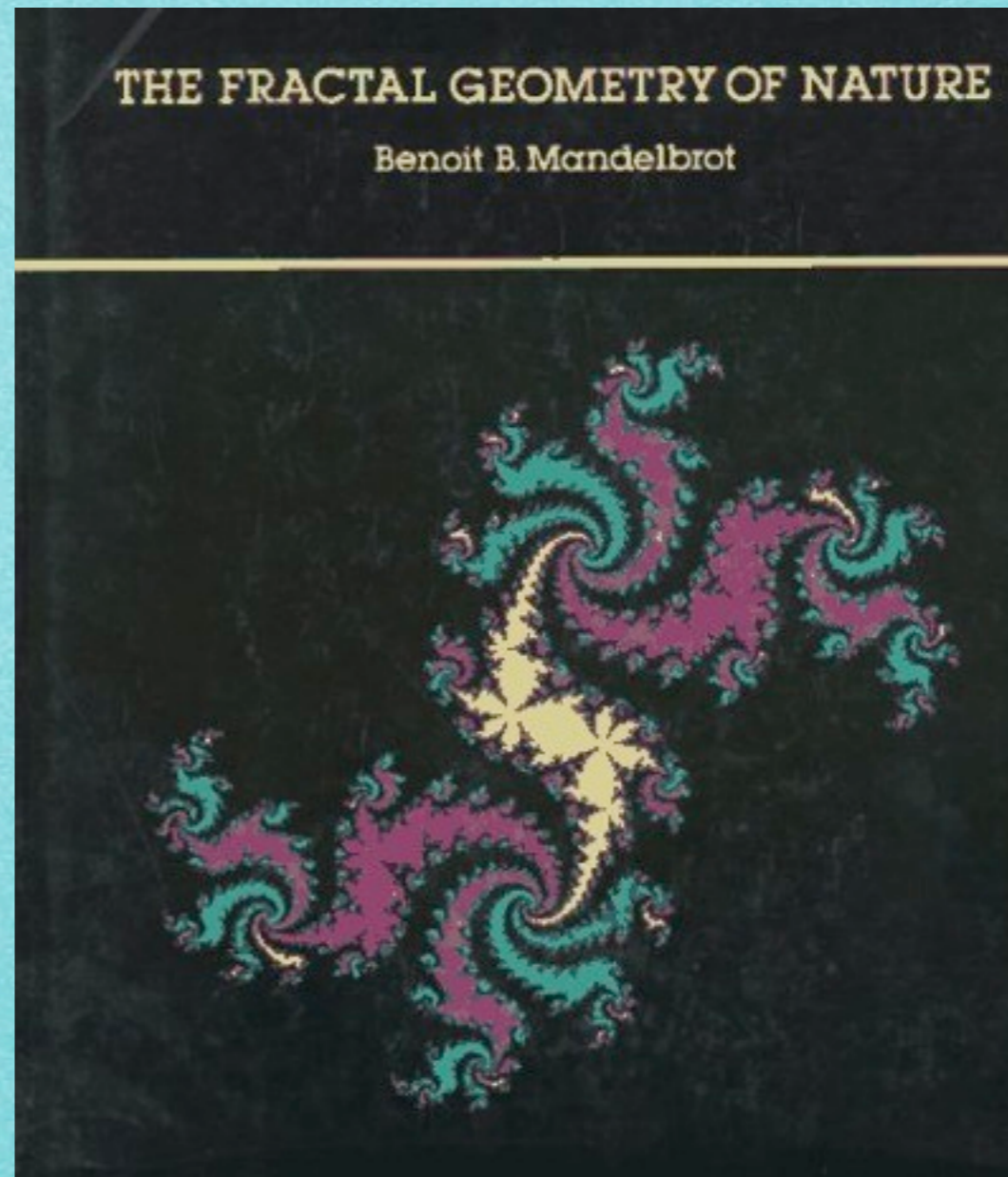
54.2 Die Mandelbrotmenge



Benoît Mandelbrot
(1924–2010)

Erste Dauerprofessur:
1999

Fractal Geometry of Nature
(1982)



54.3 Fraktale

Mandelbrot
(1967)

How long is the coast line of Britain?



Maßstab 200km:
2350km

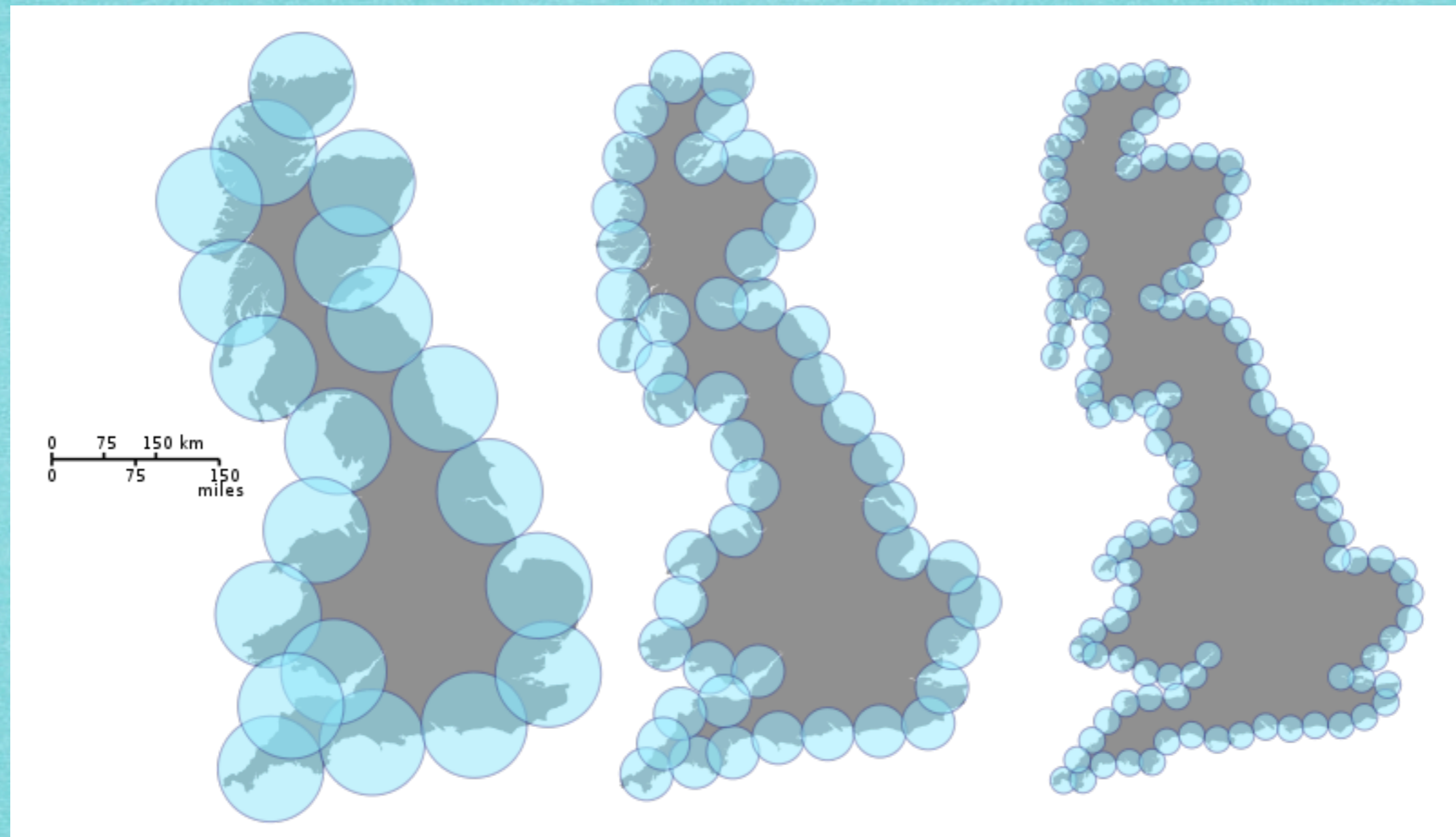


Maßstab 100km:
2775km



Maßstab 50km:
3425km

54.3 Fraktale



*Hausdorff-Dimension:
Wie wächst das Gesamtmaß in Abhängigkeit von der Größe?*

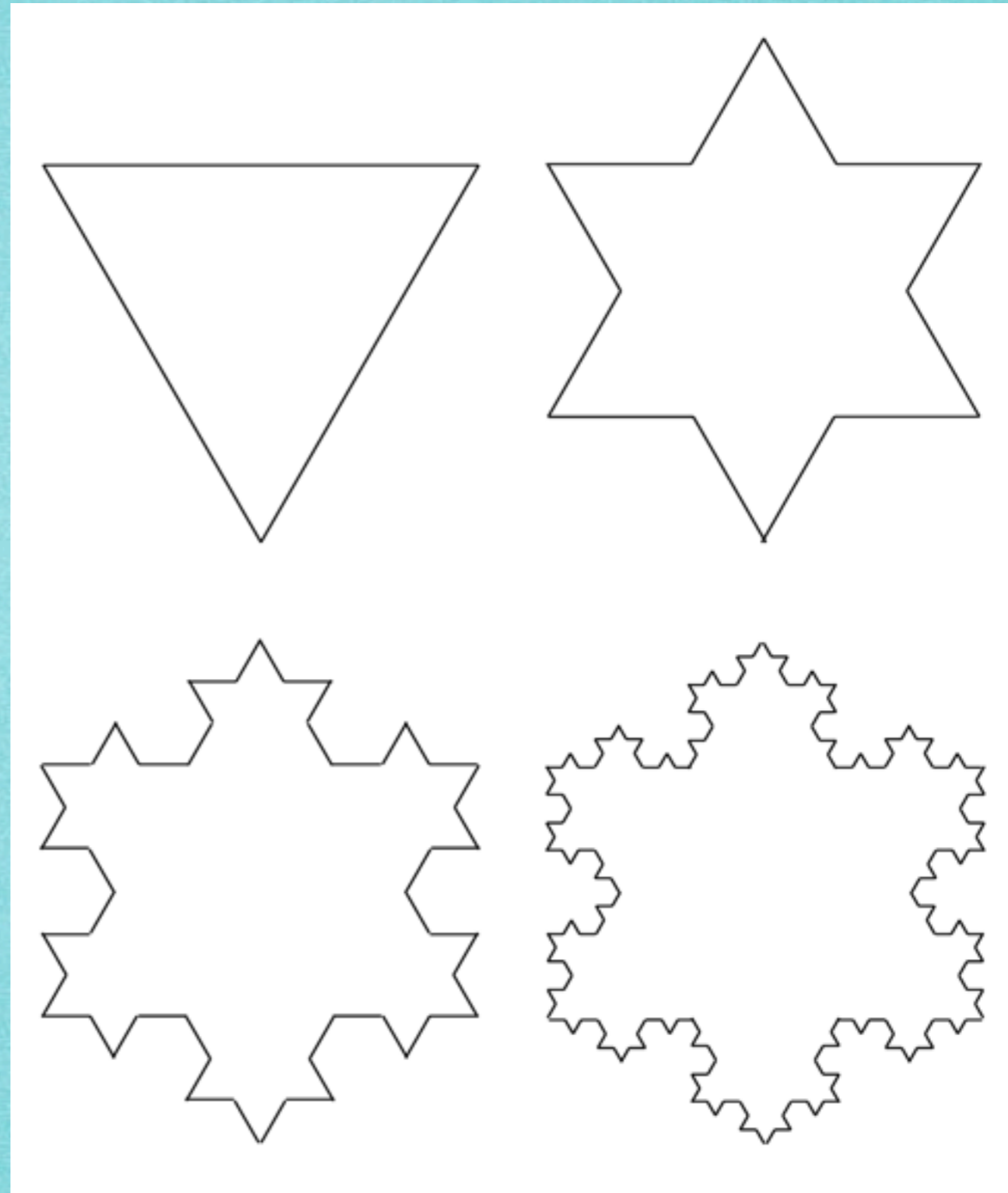
54.3 Fraktale



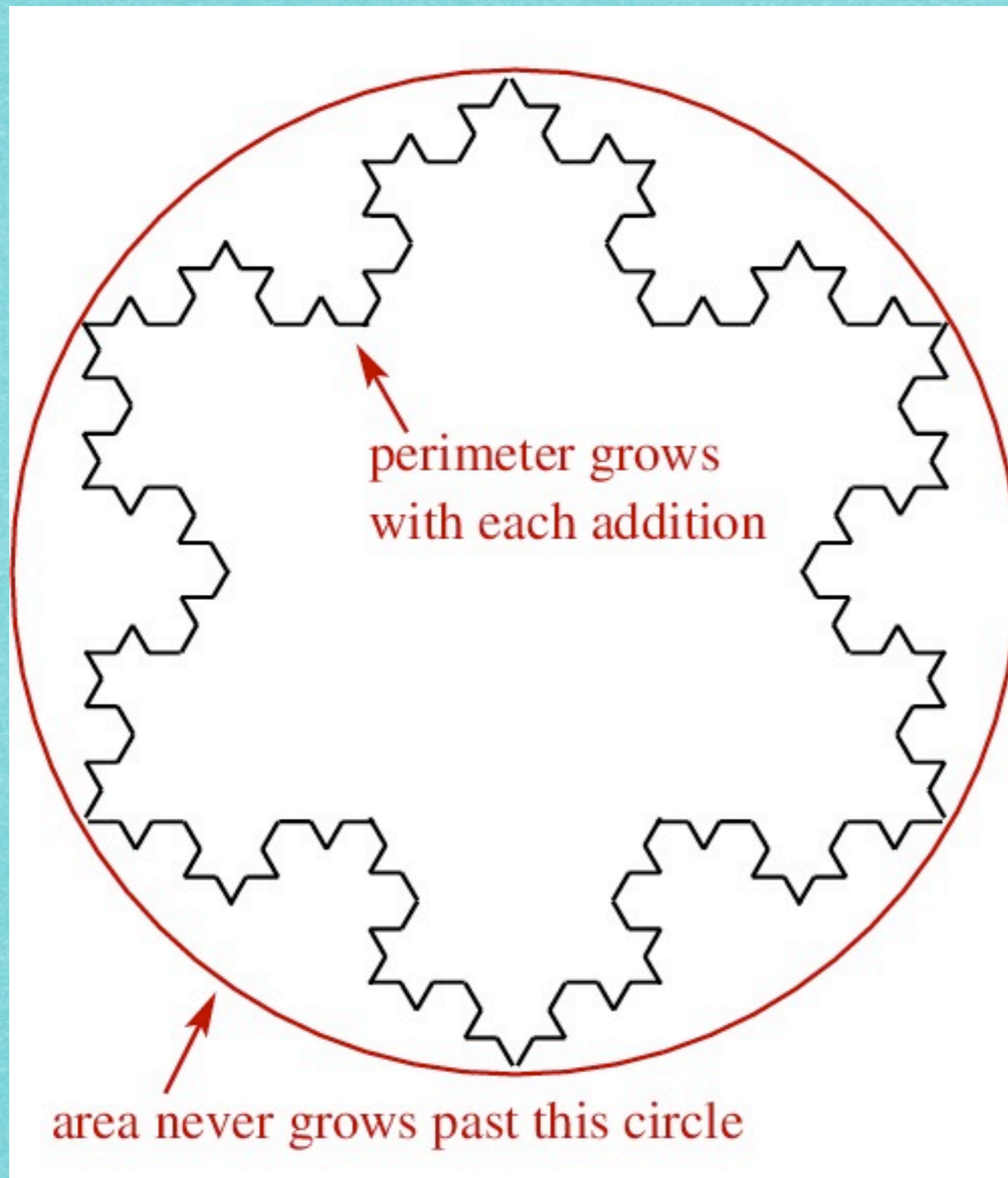
Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870–1924)

Schneeflockenkurve

(1904)



54.3 Fraktale

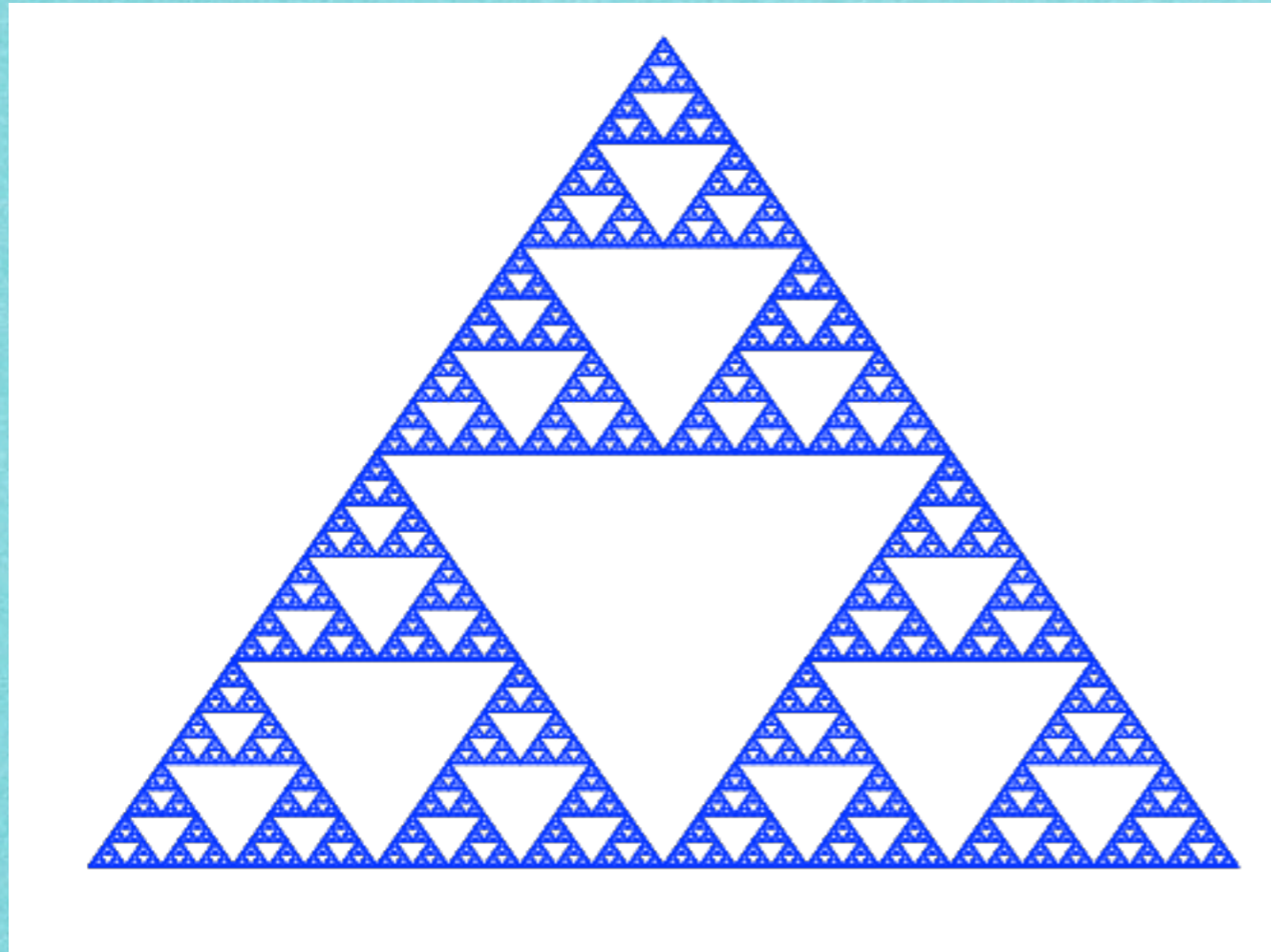


Pro Iteration:
Länge wächst um
Faktor $4/3$

Hausdorff-Dimension
des Randes:
 $\log(4)/\log(3)$
 $= 1.2618595\dots$

Fläche:
Länge wächst um
Faktor $4/3$

54.3 Fraktale



Szierpinski-Dreieck:
Fläche schrumpft um
Faktor $3/4$ pro
Iteration

Hausdorff-Dimension
der Fläche:
 $\log(3)/\log(2)$
 $= 1.5849625\dots$

54.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**

Romanesco



54.3 Fraktale

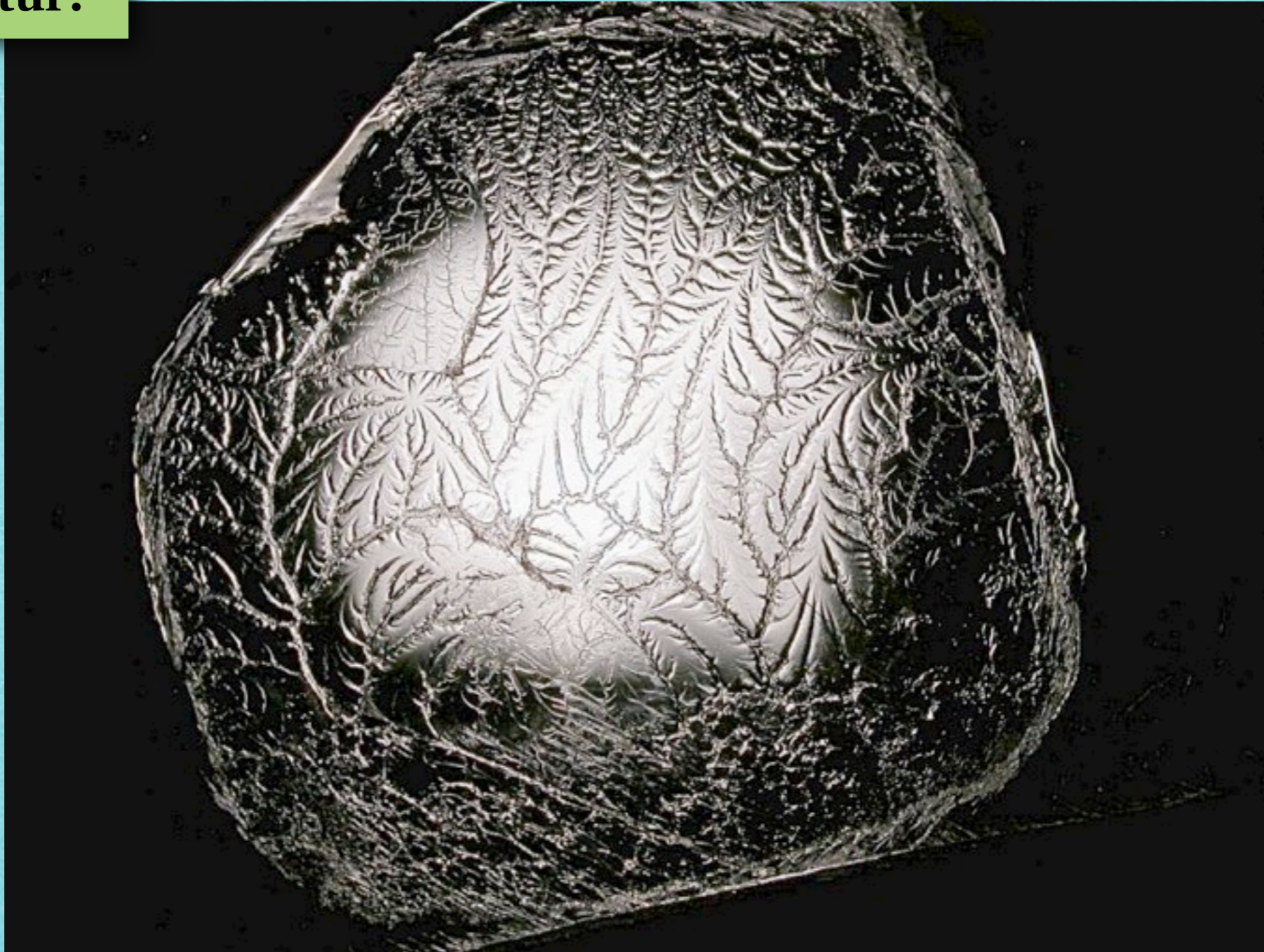
**Fraktale in
der Natur:**



Eiskristalle

54.3 Fraktale

Fraktale in
der Natur:



Adhäsionsmuster

54.3 Fraktale

Fraktale in
der Natur:



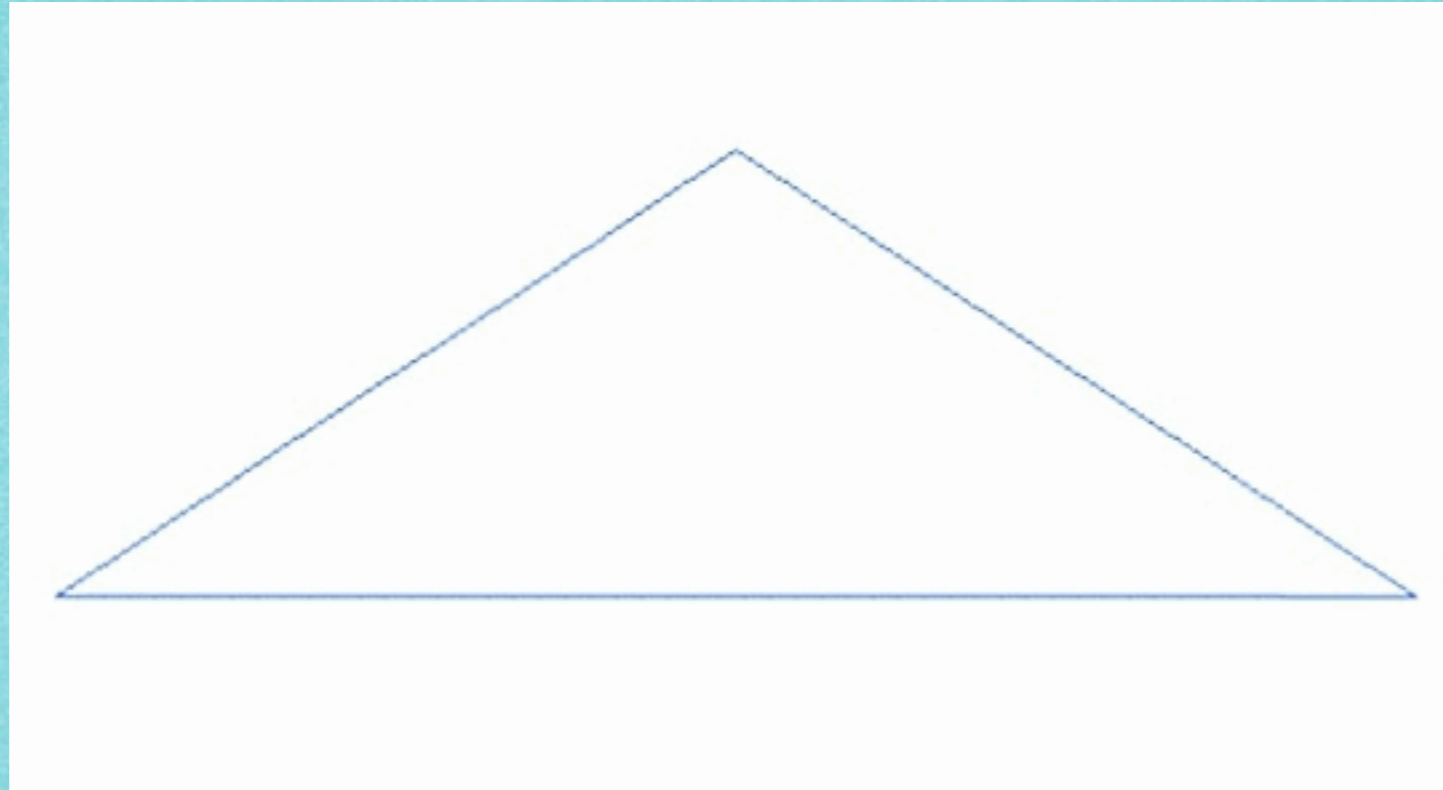
Muster elektrischer Entladung

54.3 Fraktale



Farn (nicht echt)

54.3 Fraktale



“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.” - Mandelbrot

5.4.4 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909–1984)



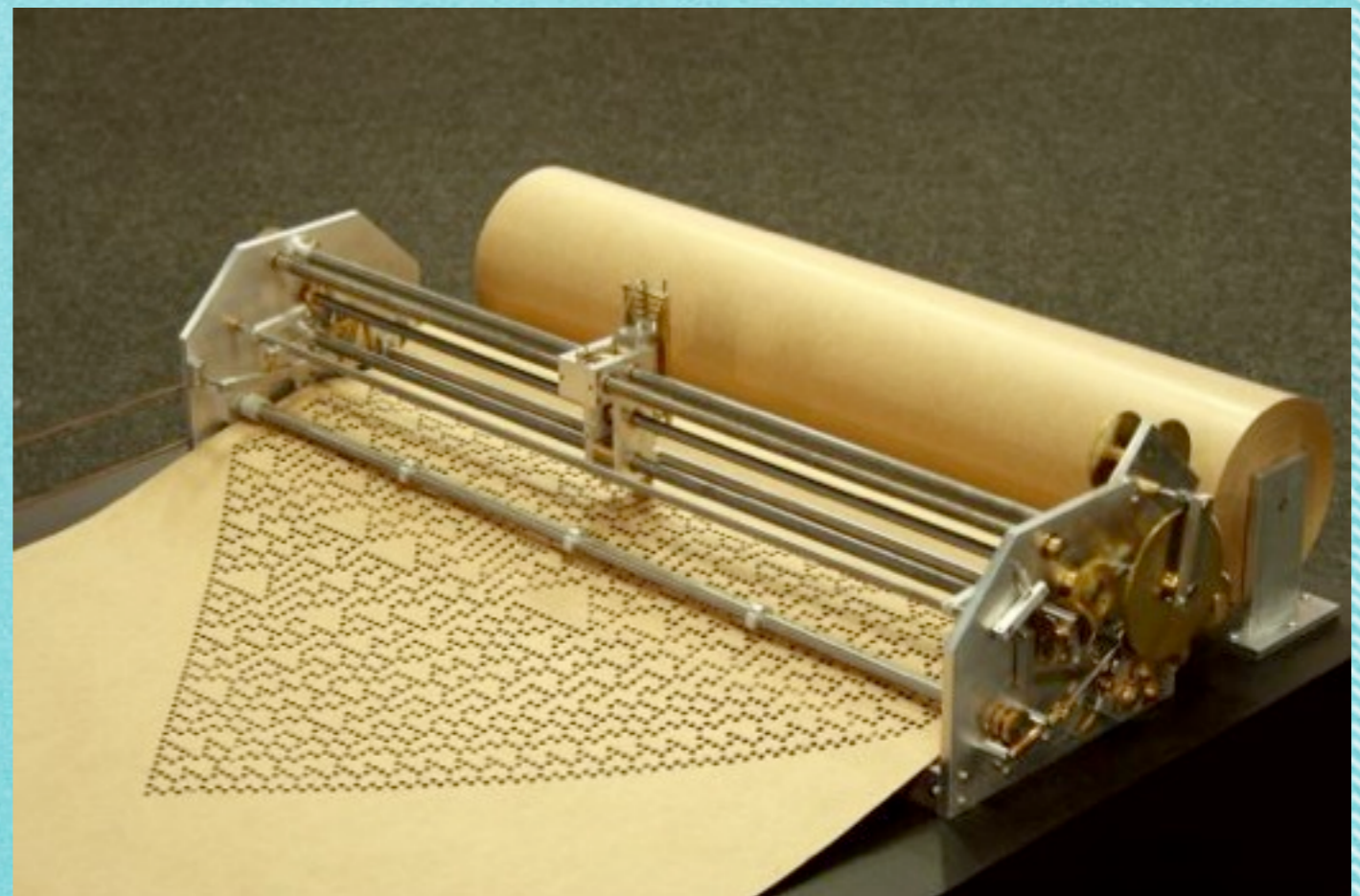
John von Neumann
(1903–1957)



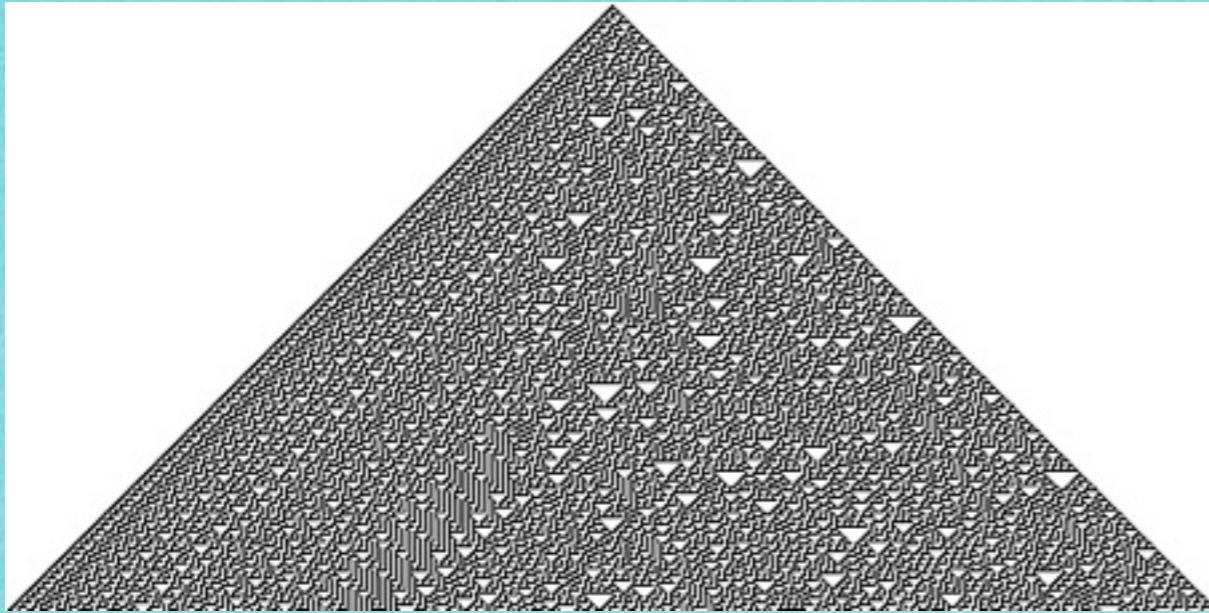
0 0 0 1 1 1 1 0

“Rule 30”

$$(0*128+0*64+0*32+1*16+1*8+1*4+1*2+0*1=30)$$



5.4.4 Zelluläre Automaten



Rule 30

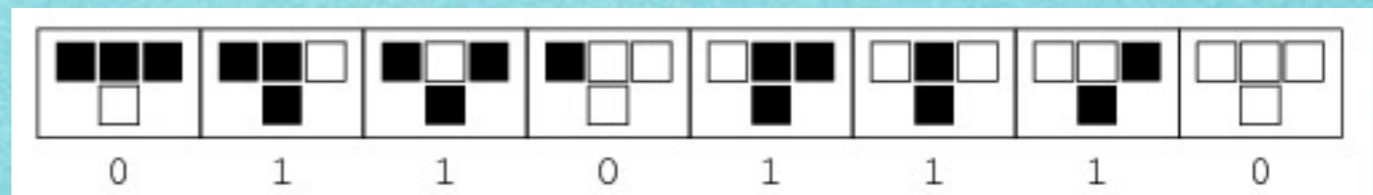
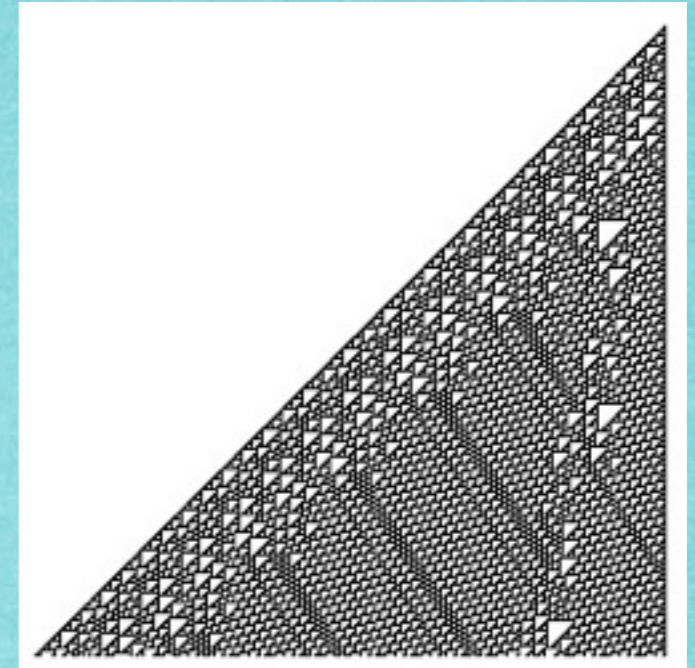
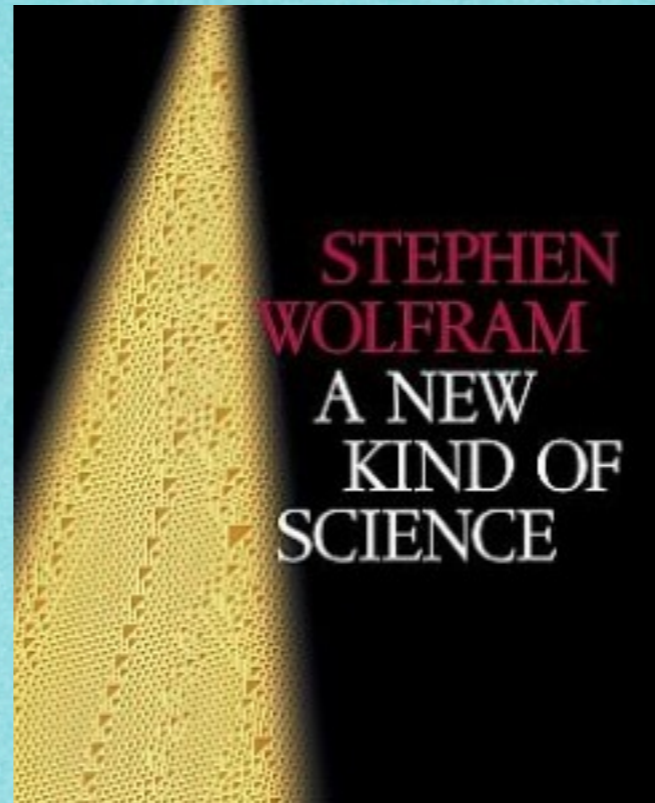


Kegelschnecke

5.4.4 Zelluläre Automaten



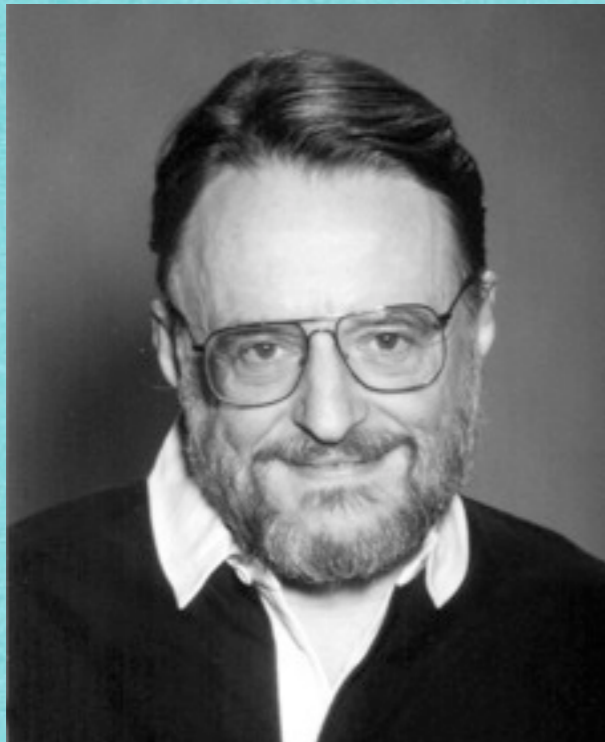
Stephen Wolfram
(1959-)



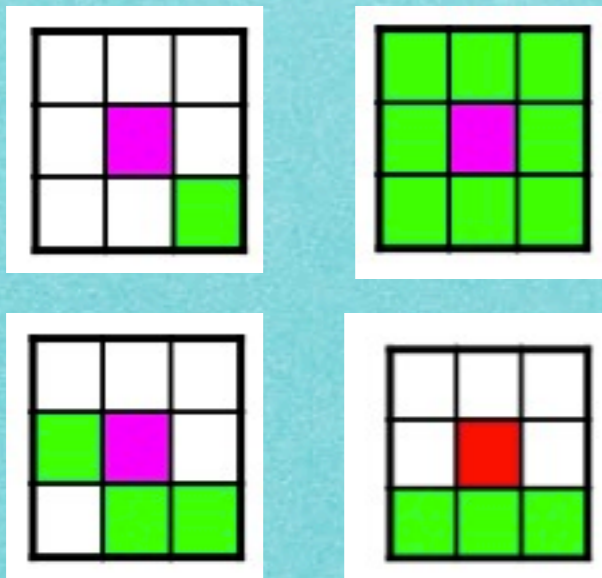
Rule 110

Matthew Cook (1998):
Rule 110 ist "universell"

5.4.4 Zelluläre Automaten

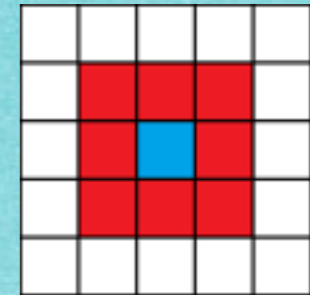


John Conway
(1937-)



Game of Life:

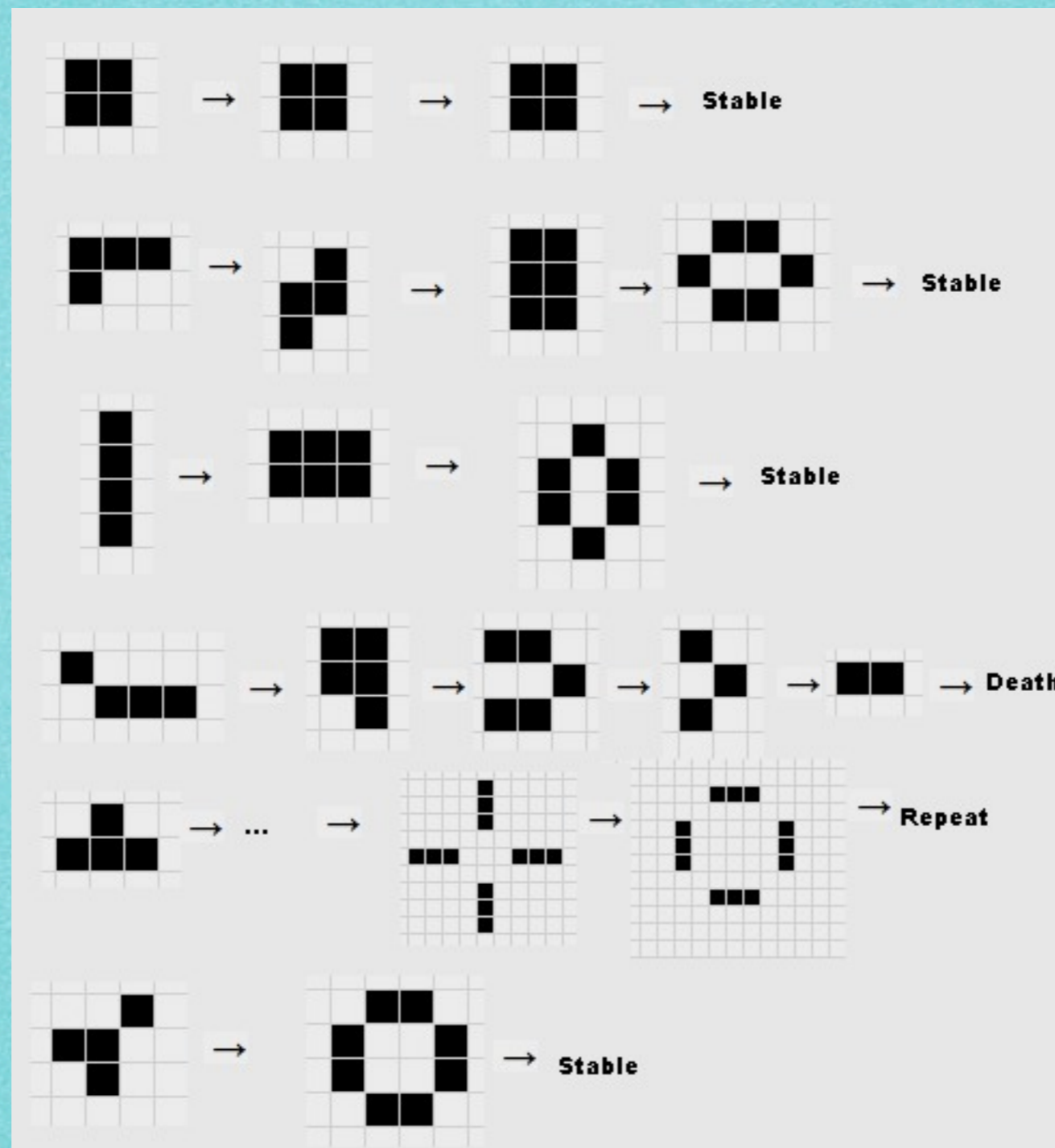
(1970)



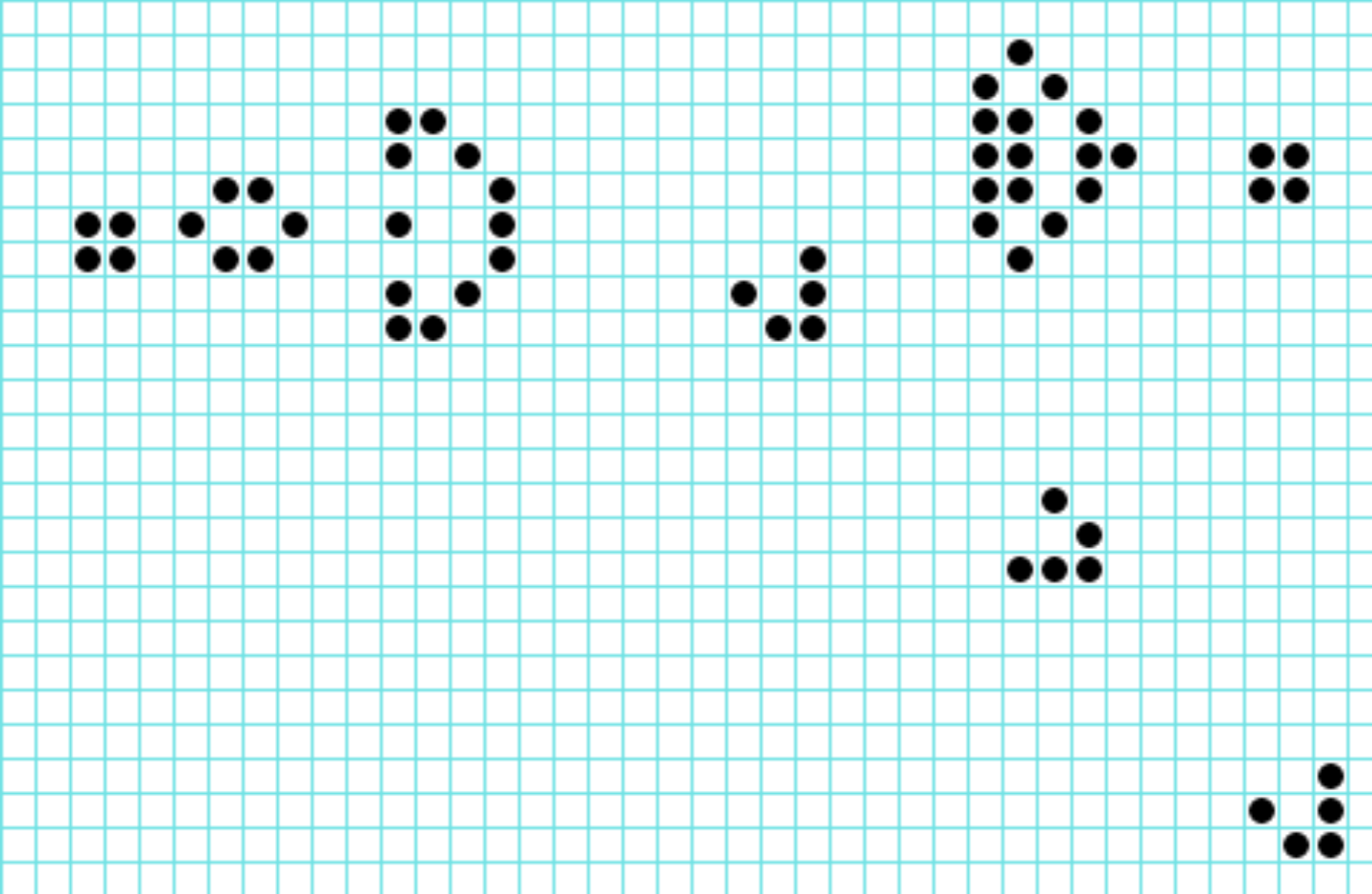
- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.
3. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt weiter.
4. Eine tote Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn wird lebend.

5.4.4 Zelluläre Automaten

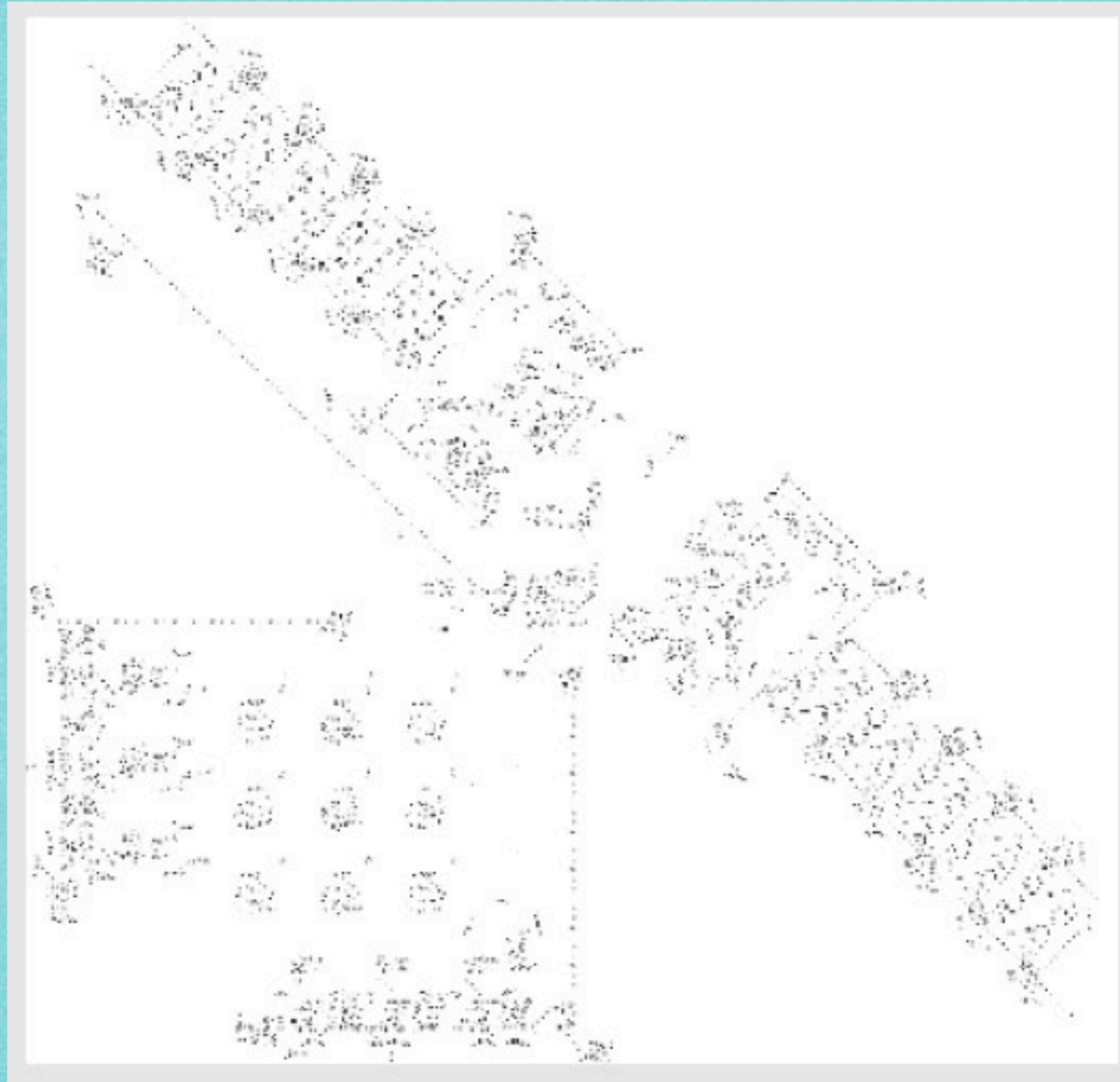


5.4.4 Zelluläre Automaten



“Gosper-Glider”

5.4.4 Zelluläre Automaten



Turing-Maschine, basierend auf
Game of Life (Paul Rendell)

5.4 Nichtlineare Rekursionen

- **Die Welt ist nichtlinear!**
- **Nichtlinearität birgt viele Überraschungen!**



Demnächst mehr!

s.fekete@tu-bs.de