Zweites Beispiel für Lösung von Rekursionsgleichungen:
Fibonacci-Zahlen!

$$F_0 = 0 \;, \quad F_1 = 1 \;, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

Dafür suchen wir eine geschlossene Form!

Gewöhnliche erzeugende Funktion:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= F_0 x^0 + F_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\
&= 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + \left(x + x^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + \left(x + x^2\right) F(x)
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Das kann man weiter zerlegen („Partialbruchzerlegung"):

Nebenrechnung zur Zerlegung!

$$\frac{x}{1-x-x^2} \overset{!}{=} \frac{A}{1-ax} - \frac{B}{1-bx} = \frac{A(1-bx) - B(1-ax)}{(1-ax)(1-bx)}.$$

Daraus rechnet man:

Nenner: $(1-ax)(1-bx) \overset{!}{=} 1-x-x^2$,

also $1-(a+b)x+abx^2 \overset{!}{=} 1-x-x^2$, d.h. $a+b=1$, $ab=-1$,

somit $b=(1-a)$ und

$a(a-1)=1$, woraus man

$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ erhält.

Außerdem $A-B+(-Ab+Ba)x = x$,

Zähler: d.h. $A=B$ und $A=\frac{1}{\sqrt{5}}=B$.

Damit hat man

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}(1-ax)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-bx)} \quad \text{mit} \quad a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \; b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Wieder mit geometrischen Reihen ist

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-bx} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n x^n,$$

also $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right)$$

Mit den gebräuchlicheren Abkürzungen

$$a = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) =: \varphi \qquad (\text{„Goldener Schnitt"})$$

und $$b = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) =: \bar{\varphi}$$ ergibt sich also

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \bar{\varphi}^n\right)$$

bzw. (ganz explizit!)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Erstaunlicherweise liefert das wirklich immer eine ganze Zahl.

Außerdem sieht man, dass die n-te Fibonacci-Zahl der n-ten Potenz des Goldenen Schnittes entspricht – mit dem Korrekturterm $\bar{\varphi}^n$ und um $\frac{1}{\sqrt{5}}$ normiert.

Da $|\bar{\varphi}| < 1$, ist $\left|\frac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2}$, d.h. F_n ist die ganze Zahl, die am nächsten an $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$ ist.

(Das erklärt auch, warum das Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonnaci-Zahlen gegen φ konvergiert!)

5.3.3 Das Master-Theorem

Betrachten wir allgemein

$$T(n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n)}_{\text{Aufteilung in Teilprobleme}} + \underbrace{\Theta(n^k)}_{\text{Kosten der Aufteilung + Zusammenfügung}}$$

Dafür suchen wir eine allgemeine Formel!

Satz 5.9 (Master-Theorem)

Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}: \; 0 < \alpha_i < 1, \; m \in \mathbb{N}, \; k \in \mathbb{R}.$

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

Beweis:

Nicht hier! (Siehe z.B. Cormen, 4.4)

Beispiele 5.10:

(a) $U(n) = 8\,U\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

(Ausprobieren mit $U(1) = 1$:

$$\begin{aligned}
U(3) &= 8 + 9 = 17 \\
U(9) &= 8 \cdot 17 + 81 = 217 \\
U(27) &= 8 \cdot 217 + 27^2 = 2465 \\
U(81) &= 8 \cdot 2465 + 81^2 = 26.281 \\
U(243) &= 8 \cdot 26.281 + 243^2 = 269.297 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$\Big\}$ 12,76
$\Big\}$ 11,35
$\Big\}$ 10,66
$\Big\}$ 10,24
)

Im Master-Theorem:

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_8 = \frac{1}{3}$, $m = 8$, $k = 2$

$\sum_{i=1}^{8} \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1$, also erster Fall:

$$U(n) \in \Theta(n^2) \quad !$$

(b) $V(n) = 9 \cdot V\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

(Ausprobieren mit $V(1) = 1$:

$$
\begin{aligned}
V(1) &= 1 &&= 1 \cdot 3^0 &&= 1 \cdot 1^2 \\
V(3) &= 9 \cdot 1 + 3^2 &&= 2 \cdot 3^2 &&= 2 \cdot 3^2 \\
V(9) &= 9 \cdot (2 \cdot 3^2) + 9^2 &&= 3 \cdot 3^4 &&= 3 \cdot 9^2 \\
V(27) &= 9 \cdot (3 \cdot 9^2) + 27^2 &&= 4 \cdot 3^6 &&= 4 \cdot 27^2 \\
V(81) &= 9 \cdot (4 \cdot 27^2) + 81^2 &&= 5 \cdot 3^8 &&= 5 \cdot 81^2
\end{aligned}
$$

usw.!)

Im Master-Theorem:

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_9 = \frac{1}{3}$, $m = 9$, $k = 2$,

$\sum_{i=1}^{9} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$, also zweiter Fall:

$$V(n) \in \Theta(n^2 \log n)$$

1c) $W(n) = 10 \cdot W\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

(Ausprobieren mit $W(1) = 1$:

$$\begin{aligned} W(1) &= 1 \\ W(3) &= 10 \cdot 1 + 3^2 = 19 \\ W(9) &= 10 \cdot 19 + 9^2 = 271 \\ W(27) &= 10 \cdot 271 + 27^2 = 3439 \\ W(81) &= 10 \cdot 3439 + 81^2 = 40.951 \\ W(243) &= 10 \cdot 40.951 + 243^2 = 468.559 \end{aligned}$$

$\}$ 19
$\}$ 14,26
$\}$ 12,69
$\}$ 11,90
$\}$ 11,44

usw. !

Wogegen konvergieren die Quotienten ?!

-> Gegen 10 !)

Im Master-Theorem :

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{10} = \frac{1}{3}$, $m = 10$, $k = 2$,

$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 1$, also dritter Fall !

Gesucht wird c mit $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i^c = 1$,

d.h. $10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^c = 1$,

also $\left(\frac{1}{3}\right)^c = \frac{1}{10}$, oder $c = \log_3 10 \approx 2{,}096$.

Das liefert $W(n) = \Theta\left(n^{2{,}096\ldots}\right)$!