5.2.2 Weitere Sortieralgorithmen (→ obere Schranken für Sortieren)

Bubblesort:

- gegeben: Sequenz v. Zahlen → Array A $\boxed{\;\;\mid z_1 \mid z_2 \mid\;\;}$
- Vorgehen:
  - Überstreiche mit zwei benachbarten Zellen $z_1 z_2$
  - Falls $z_1 > z_2$: Vertausche z_1 und z_2
  - Wenn z_2 letztes Element v. A: fixiere z_2
  - Wiederhole überstreichen ohne bereits fixierten Bereich

Bsp.:

$\boxed{7 \mid 1}$ 8 2 3 5

$\boxed{1 \mid 7}$ 8 2 3 5

1 $\boxed{7 \mid 8}$ 2 3 5

1 7 $\boxed{8 \mid 2}$ 3 5

1 7 $\boxed{2 \mid 8}$ 3 5

1 7 2 $\boxed{8 \mid 3}$ 5

1 7 2 $\boxed{3 \mid 8}$ 5

1 7 2 3 $\boxed{8 \mid 5}$

1 7 2 3 $\boxed{5 \mid \boxed{8}}$

$\boxed{1 \mid 7}$ 2 3 5 8

1 $\boxed{7 \mid 2}$ 3 5 8

1 $\boxed{2 \mid 7}$ 3 5 8

1 2 $\boxed{7 \mid 3}$ 5 8

1 2 $\boxed{3 \mid 7}$ 5 8

1 2 3 $\boxed{7 \mid 5}$ 8

1 2 3 $\boxed{5 \mid 7}$ 8

es passiert nichts mehr, da sortiert

Definition 5.7 (Stabilität)

Ein Sortierverfahren heißt <u>stabil</u> wenn gleiche Werte nach dem Algorithmus-durchlauf in der gleichen Reihenfolge sind wie vorher.

Bubblesort formaler:

Algorithmus (Bubblesort)

Input: Array A[1] ... A[n]

Output: Sortiertes Array

```
1.        For (i=0) to n-1
1.1           Do for (j=1) to n-i-1
1.1.1             Do if (A[j] > A[j+1])
1.1.1.1               Vertausche A[j] und A[j+1]
```

Satz

Bubblesort ist ein korrektes, stabiles Sortierverfahren. Die Laufzeit ist $\Theta(n^2)$

Beweis: selbst!

Selectionsort

- gegeben: Sequenz v. Zahlen -> Array A
- Vorgehen: · Suche Minimum
  · Tausche " an linkeste Stelle
  · Streiche linkeste Stelle
  · Wiederhole auf noch nicht gestrichenem Bereich bis alles gestrichen

Bsp.:

Min.

$7 \quad \boxed{1} \quad 8 \quad 2 \quad 3 \quad 5$

$\cancel{1} \quad 7 \quad 8 \quad \boxed{2} \quad 3 \quad 5$

$\cancel{1} \quad \cancel{2} \quad 8 \quad 7 \quad \boxed{3} \quad 5$

$\cancel{1} \quad \cancel{2} \quad \cancel{3} \quad 7 \quad 8 \quad \boxed{5}$

$\cancel{1} \quad \cancel{2} \quad \cancel{3} \quad \cancel{5} \quad 8 \quad \boxed{7}$

$\cancel{1} \quad \cancel{2} \quad \cancel{3} \quad \cancel{5} \quad \cancel{7} \quad \boxed{8}$

$\cancel{1} \quad \cancel{2} \quad \cancel{3} \quad \cancel{5} \quad \cancel{7} \quad \cancel{8}$

~~BVR 1~~

5.3 Behandeln von Rekursionen

Welche Möglichkeiten gibt es, Rekursionsgleichungen zu lösen?

5.3.1 Substitutionsmethode

Wie gesehen!

(1) Rate eine Lösung.

(2) Beweise die Richtigkeit per vollständiger Induktion.

Das haben wir im Beweis von Satz 5.7 angewendet.

Schwierigkeit: Gute Lösung finden!

(In der Regel ist man an einer möglichst genauen Lösung interessiert – das kann schwer bis unmöglich sein!)

Oft kann man aber Abschätzungen gewinnen, z.B.

$$T(n) \in \Omega(n)$$
$$T(n) \in O(n^2)$$

5.3.2 Erzeugende Funktionen

Man kann Rekursionen auch oft lösen, indem man sie in einen abstrakt-formalen Kontext einbettet und die dafür bekannten Rechenregeln anwendet.

Dafür betrachten wir

~~B VRZ~~

DEFINITION 5.8 (Erzeugende Funktion)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $a_n \in \mathbb{R}$.
Dann heißt $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$
die (gewöhnliche) erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel

(a) $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 0, 1, 2, ~~\ldots~~$

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$

$f(x) = 1\cdot x^0 + 2\cdot x^1 + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$

Wir suchen eine „geschlossene Form" für a_n, also einen expliziten Ausdruck, um a_n direkt aus n (ohne Rekursion) ausrechnen zu können.

Wir können aufgrund der Rekursion $f(x)$ umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot a_{n-1} \cdot x^n \\ &= a_0 + 2x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{f(x)} = a_0 + 2x \cdot f(x) \end{aligned}$$

Auflösen nach $f(x)$:

$$f(x) = 1 + 2x f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x)(1-2x) = 1, \quad \text{d.h.} \quad f(x) = \frac{1}{1-2x}$$

~~RVR3~~

Das kann man auch als Reihe schreiben, indem man

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p} \quad \text{nutzt:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

Damit Gleichheit gilt, müssen die Koeffizienten gleich sein

$$a_0 = 2^0$$
$$a_1 = 2^1$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^n$$

$\Rightarrow$ Geschlossene Form!

Das geht natürlich auch für kompliziertere Fälle, die schwerer zu lösen sind!
Oft setzt man dafür auch ein breiteres Arsenal an Umformungen ein, Tabellen von Funktionsentwicklungen, etc.

(Mehr dazu nicht hier ...)