① Beweistechniken

② Graphenbegriffe

1. Direkter Beweis

2. Vollständige Induktion

3. Widerspruchsbeweis

Typische Aufgabenstellungen

- beweise, zeige, begründe (Aussage gilt)
- widerlege (" " nicht)
- beweise oder widerlege (selbst überlegen!)

Typ $\forall$: Aussage: Alle Äpfel sind grün!

$\forall \text{Apfel } a : \text{grün}(a)$

einen grünen Apfel zu zeigen beweist nichts!

" roten " " " widerlegt die Aussage

Typ $\exists$: Aussage: Es existiert ein grüner Apfel!

$\exists \text{Apfel } a : \text{grün}(a)$

hier reicht es, einen grünen Apfel zu zeigen

1. Direkter Beweis

Muster: Wenn A gilt, dann auch B

Bsp.: Division mit Rest (z.B. 13/4 ist 3 Rest 1)

```
function dirmod (x, y) begin
    q ← 0
    r ← x                 (1)
    while r ≥ y do
        q ← q+1
        r ← r-y           (2)
    done
    return (q, r)         (3)
end
```

Bsp.: dirmod(13,4)

	q	r
(1)	0	~~x~~ 13
(2)	1	9
(2)	2	5
(2)	3	1

$\rightsquigarrow 13 = 3 \cdot 4 + 1$

Korrektheit Beweisen!

Behauptung: Wenn $x, y \in \mathbb{N}$ und $y \neq 0$, dann gibt dirmod(x,y) (q, r) zurück mit

$$x = \underbrace{q}_{\text{Faktor}}y + \underbrace{r}_{\text{Rest}} \quad \underline{\text{und}} \quad r < y$$

Beweis:

Bei (1) gilt $x = qy + r$, weil $x = \underset{q}{0} \cdot y + \underset{r}{x}$. Bei (2) gilt das auch, da am Anfang des Schleifendurchlaufs $r \geq y$ ist, und wir r um y verringern. Jetzt sind die neuen Werte für q und r $q' = q + 1$ und $r' = r - y$ mit

$$\begin{aligned} q'y + r' &= (q+1)y + (r-y) \\ &= qy \underline{+y} + r \underline{-y} \\ &= qy + r \\ &= x \end{aligned}$$

Die Schleife erhält also die <u>Invariante</u> $x = qy + r$.

Bei (3) gilt zusätzlich $\neg(r \geq y) \Leftrightarrow r < y$. $\square$

2. Vollständige Induktion

<u>Muster</u>: Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder eine Teilmenge davon) eine Aussage A gilt.

$(\forall n \in \mathbb{N} : A(n))$

<u>Vorgehen</u>: (IA) Induktionsanfang, beweise $A(1)$

(IS) Induktionsschritt: Beweise, dass aus $A(1) \wedge A(2) \wedge \dots \wedge A(n)$ folgt, dass auch $A(n+1)$ gilt.

(IV) Im IS heißt $A(1) \wedge A(2) \wedge \dots \wedge A(n)$ Induktionsvoraussetzung.

Dann: $\underset{\text{IA}}{A(1)} \overset{(IS)}{\Rightarrow} A(1) \wedge A(2) \overset{(IS)}{\Rightarrow} A(1) \wedge A(2) \wedge A(3) \overset{(IS)}{\Rightarrow} \dots$

<u>Bsp.</u>: Algorithmus, der $\sum_{i=1}^{n} x_i$

```
function sum(x_1, ..., x_n) begin
    s ← 0                    (1)
    for i ← 1 to n do
        s ← s + x_i          (2)
    done
    return s
end
```

<u>Behauptung</u>: Nach dem i-ten Schleifendurchlauf ist

$$s = x_1 + x_2 + \dots + x_i$$

<u>Beweis</u>: (IA): Nach dem 1. Durchlauf ist $s = x_1$ ✓

(IS): Zeige, dass nach dem i-ten Durchlauf $s = x_1 + x_2 + \dots + x_i$ ist. Dabei darf die (IV) benutzt werden, dass nach dem $(i-1)$-ten Durchlauf $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}$ war.

Vorm i-ten Durchlauf ist $s \overset{(IV)}{=} x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}$. Dann wird bei (2) s um x_i erhöht, d.h.

$$s = (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) + x_i$$

=> Insgesamt gilt die Behauptung

Damit ist nach dem n-ten Durchlauf

$$s = x_1 + \dots + x_n \qquad \square$$

3. Widerspruchsbeweis

Muster: Zeige, dass wenn A gilt, auch B gilt! ($A \Rightarrow B$)

Vorgehen: Wir nehmen mal an, dass $A \Rightarrow B$ nicht korrekt ist, d.h. es gibt eine Situation, in der A gilt, B aber nicht ($A \wedge \neg B$). Das würde die Aussage widerlegen! Aus dieser Situation leiten wir einen Widerspruch ab. Daraus folgern wir, dass die Annahme falsch gewesen sein muss.

Also gilt $A \Rightarrow B$.

Zeige: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Beweis durch Widerspruch: Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. D.h. es gibt $\sqrt{2} = q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ und $\frac{a}{b}$ ist vollständig gekürzt, d.h. $ggT(a,b) = 1$.

Wegen $2 = q^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ ist $2b^2 = a^2$.

$\Rightarrow a^2$ ist gerade $\Rightarrow a$ gerade.

Einsetzen liefert: $2b^2 = a^2 = (2a_0)^2 = 4a_0^2$

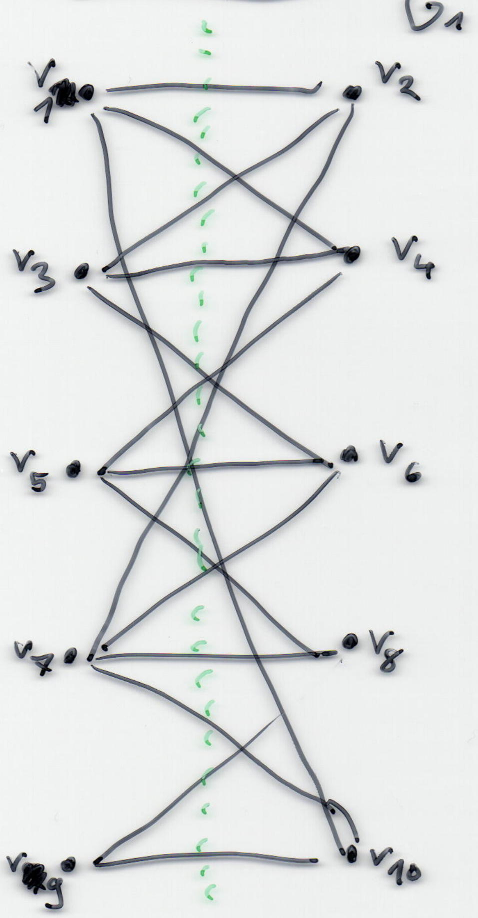
$$\text{also} \quad 2b^2 = 4a_0^2$$
$$b^2 = 2a_0^2$$

$\Rightarrow b$ ist gerade!

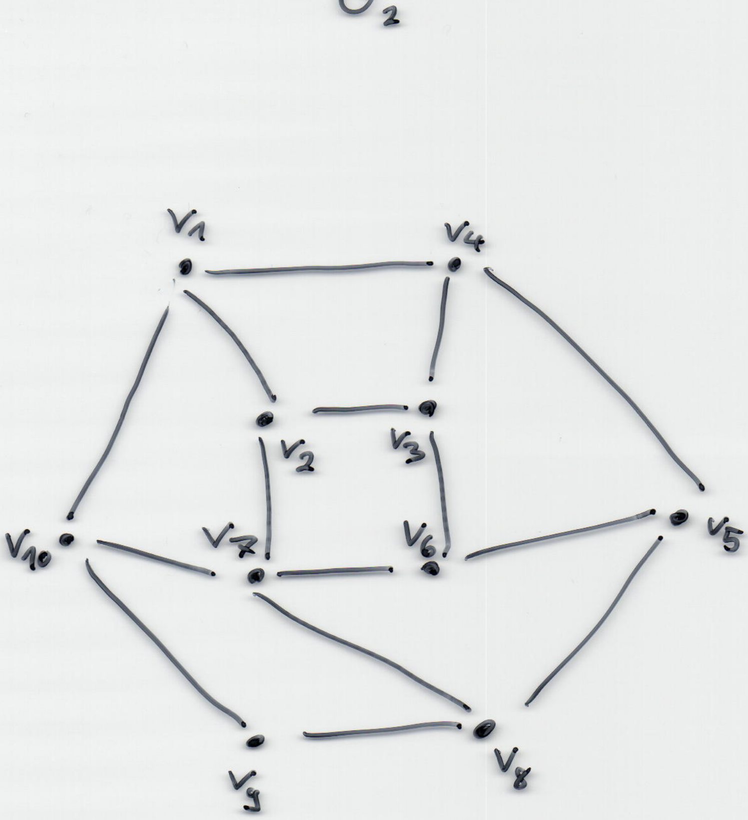
a und b sind gerade. $\Rightarrow \frac{a}{b}$ nicht vollst. gekürzt

$\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow q = \sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl! $\square$

Graphen



bipartit

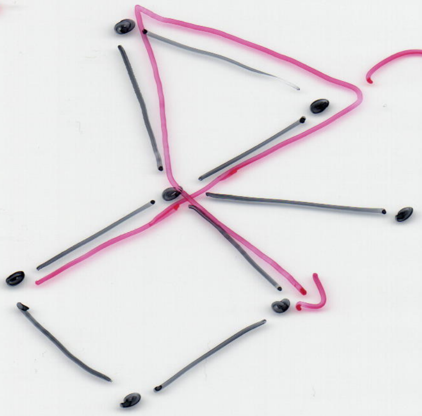


Sind G_1 und G_2 gleich? Ja!

- Einbettung unterschiedlich
- Gleicher Graph kann unterschiedlich aussehen!

$G = G_1 = G_2$

- keine parallelen Kanten, keine Schleifen



Weg, aber kein Pfad

Kantenfolge, kein Weg