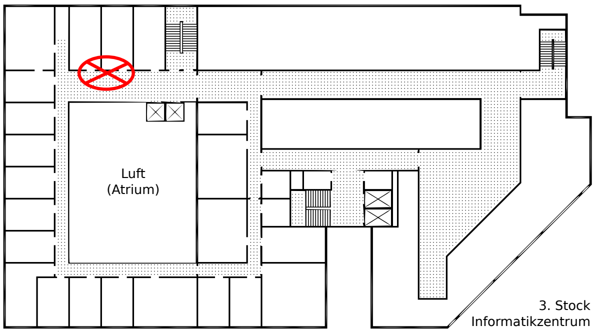
Abteilung Algorithmik **Winter 2012/13**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Alexander Kröller
Stephan Friedrichs
Jan Kokemüller

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 5 vom 14. 01. 2013

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 28. 01. 2013, entweder in der Übung im PK 2.2 oder bis 14:45 im Hausaufgabenrückgabeschrank.



Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Matrikelnummer versehen!

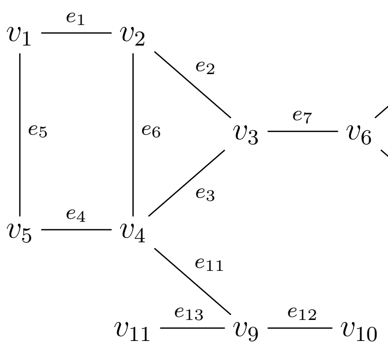
Aufgabe 1 (Dualität): Zeige, dass das duale des dualen LPs wieder das primale LP ist. **(5 Punkte)**

Aufgabe 2 (Fraktionales Edge Cover): Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $E' \subseteq E$ heißt *Edge Cover* von G, wenn jeder Knoten von G zu einer Kante in E' inzident ist. Wir erlauben stattdessen eine fraktionale Auswahl und nennen eine nichtnegative Kantengewichtung $(x_e)_{e \in E}$ ein *fraktionales Edge Cover* von G, wenn jeder Knoten zu Kanten von einem Gesamtgewicht von mindestens 1 inzident ist. Siehe Aufgabenteil c) für ein Beispiel.

a) Formuliere „fraktionales Edge Cover mit minimalem Gesamtgewicht aller Kanten" als LP (P) für allgemeine Graphen G.

b) Dualisiere (P). Die fraktionale Variante welches Graphenproblems ist das?

c) Gegeben ist der folgende Graph ein fraktionales Edge Cover x^* mit $x^*_{e_1} = \cdots = x^*_{e_5} = \frac{1}{2}$, $x^*_{e_8} = \cdots = x^*_{e_{10}} = \frac{1}{2}$, $x^*_{e_{12}} = x^*_{e_{13}} = 1$ und $x^*_{e_6} = x^*_{e_7} = x^*_{e_{11}} = 0$. Zeige durch Konstruktion einer geeigneten dualen Lösung, dass x^* optimal ist.



(1 + 3 + 4 Punkte)

Aufgabe 3 (Komplementärer Schlupf): Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & \\
\text{s. t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq 1 \\
& & & & & & & x_1, & \ldots, & x_5 & \geq 0
\end{array}$$

a) Formuliere das duale Problem zu (P).

b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).

c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist. (Hinweis: Auch wenn man y nicht kennt, kann man Bedingungen herleiten, die ein y erfüllen muss, und dann konkrete Dinge berechnen.)

($2 + 2 + 3$ Punkte)