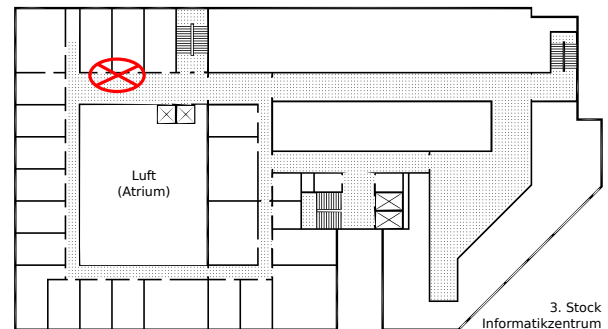


Prof. Dr. Alexander Kröller
Stephan Friedrichs
Jan Kokemüller

Mathematische Methoden der Algorithmik Übung 4 vom 17. 12. 2012

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 14.01.2013, entweder in der Übung im PK 2.2 oder bis 14:45 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Matrikelnummer versehen!



Aufgabe 1 (Der Simplex-Algorithmus): Löse das folgende LP mit dem Simplex-Algorithmus:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 12 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Wähle als Pivotspalte immer die mit dem größten positiven Kostenkoeffizienten. Kommen mehrere Pivotzeilen in Frage, wähle die mit dem kleinsten Variablenindex. Gib eine optimale Basislösung und den zugehörigen Zielfunktionswert an. (8 Punkte)

Aufgabe 2 (Eigenes Beispiel für den Simplex-Algorithmus): Überlege dir ein eigenes LP (P) und löse es mit Hilfe des Simplex-Algorithmus'. (P) soll in der Form $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ sein und folgende Anforderungen erfüllen:

- Die Lösungsmenge von (P) ist nicht leer. (P) darf unbeschränkt sein, muss aber nicht.
- (P) ist zweidimensional, kommt also mit den Variablen x_1 und x_2 aus.
- Es gibt in (P) mindestens fünf Ungleichungen, die nicht die Form $0 \leq 0$ oder $-\alpha x_i \leq 0$ für ein $\alpha \geq 0$ haben.
- (P) enthält eine degenerierte, zulässige Basislösung.
- Eine der Ungleichungen von (P) ist redundant. Das ist genau dann der Fall, wenn sich die Lösungsmenge von (P) durch Weglassen dieser Ungleichung nicht ändert.

Achte bei der Konstruktion darauf, dass alle Teilaufgaben erfüllbar sind, zum Beispiel darauf dass überhaupt genug (degenerierte) Simplex-Schritte möglich sind.

- a) Schreibe (P) als Ungleichungssystem, zeichne es auf und markiere die zulässige Lösungsmenge.
- b) Bringe (P) in die Form $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ und schreibe es in der Tableaudarstellung.
- c) Wende den Simplex-Algorithmus auf (P) an. Du darfst in jedem Schritt eine beliebige Pivotspalte mit positiven reduzierten Kosten auswählen. Dabei sollen mindestens 4 Simplex-Schritte gemacht werden, mindestens einer davon degeneriert.
- d) Gib für jedes Tableau aus der vorigen Teilaufgabe die aktuelle Basis, Nichtbasis und Basislösung an. Markiere jeweils, ob die aktuelle Basislösung degeneriert ist, ob sie optimal oder ob das LP unbeschränkt ist und woran du all das im Tableau erkennst.
- e) Markiere die Schritte des Simplex-Algorithmus' in deiner Zeichnung.

(Hinweis: Sorge dafür, dass $x_1 = x_2 = 0$ eine zulässige Basislösung von (P) ist, damit du sie als Startbasis für den Simplex-Algorithmus benutzen kannst.) (2 + 1 + 4 + 4 + 1 **Punkte**)

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch!