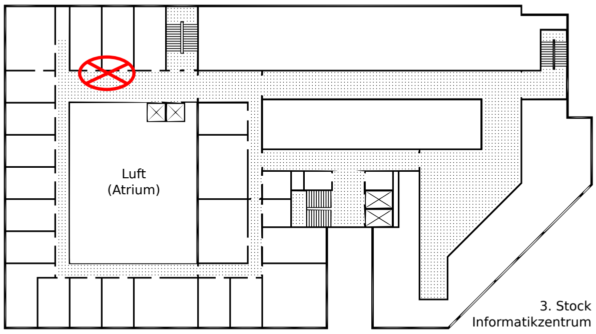
Abteilung Algorithmik **Winter 2012/13**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Alexander Kröller
Stephan Friedrichs
Jan Kokemüller

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 3 vom 3. 12. 2012

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 17. 12. 2012, entweder in der Übung im PK 2.2 oder bis 14:45 im Hausaufgabenrückgabeschrank.



Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Matrikelnummer versehen!

Aufgabe 1 (Modellierung): Die auf Blatt 1 entwickelten Konzepte für die Rohstofflieferungen an Raffinerien eines Energiekonzerns haben den Gewinn um 7% gesteigert. Da die Manager eine Gewinnbeteiligung erhalten, sind sie hellauf begeistert und möchten die bestehende Lösung derart erweitern, dass nicht nur die Lieferungen zu den Raffinerien über LPs geregelt wird, sondern zusätzlich noch, welche Raffinerie wie viele Rohstoffe verarbeitet (das war bisher noch fest vorgegeben). Das Szenario sieht jetzt folgendermaßen aus:

Es gibt drei Rohstofftypen $U = \{UO, UB, US\}$ (unraffiniertes Erdöl und unraffinierte Braun- bzw. Steinkohle). In den Raffinerien wird jeder unraffinierte Rohstoff zu seiner raffinierten Variante weiterverarbeitet, diese sind $T = \{RO, RB, RS\}$ (raffiniertes Öl, raffinierte Braun- und Steinkohle). Dabei wird aus Rohstoff Ux immer Produkt Rx.

Es gibt konzerneigenen Rohstoffabbau sowie externe Zulieferer für jeden dieser Rohstofftypen, die als Quellen Q zusammengefasst sind. Jedes $q \in Q$ hat für jeden Rohstofftypen $u \in U$ eine Höchstkapazität k_q^u (hat Lieferant q z. B. kein Erdöl im Angebot, ist $k_q^{UO} = 0$). Beliefert werden sollen Raffinerien R, die jeweils in der Lage sind, bestimmte Rohstoffe aus U zu verarbeiten. Jede Raffinerie $r \in R$ kann eine Einheit von Rohstoff $u \in U$ in $0 \leq c_r^u \leq 1$ Einheiten von seinem weiterverarbeitetem Pendant veredeln. Kann r den Rohstoff u nicht verarbeiten, ist $c_r^u = 0$.

Am Ende benötigt der Konzern d^t von jedem verarbeiteten Rohstoff $t \in T$. Mindestens d_r^t davon sollen in Raffinerie $r \in R$ produziert werden, damit die Gewerkschaften keine Angst bekommen, dass r geschlossen werden könnte.

Selbstverständlich werden keine Rohstoffe verschenkt und die Lieferungskosten hängen nicht nur vom jeweiligen Anbieter ab, sondern auch vom zurückzulegenen Transportweg. Der Preis, eine Einheit von Rohstoff $u \in U$ von Anbieter $q \in Q$ zu kaufen und zu Raffinerie $r \in R$ zu transportieren, ist t_{qr}^u pro Einheit.

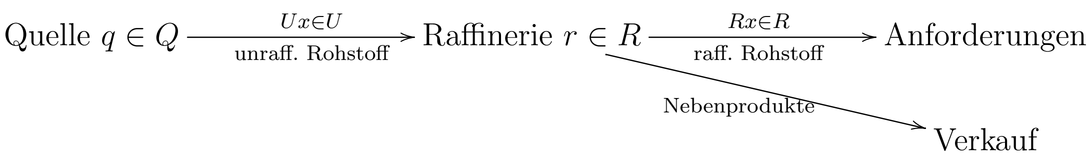
Quelle	Rohstoff	Kapazität
Lieferant q_1	Erdöl	5000
	Braunkohle	5000
	Steinkohle	5000
Pipeline q_2	Erdöl	500
Konzerneigene Kohlegrube q_3	Braunkohle	400
Konzerneigene Bohrinsel q_4	Erdöl	1200

Tabelle 1: Kapazitäten der Rohstoffquellen

Raffinerie	Rohstoff	Effizienz	Nebenprodukte	Anforderungen
Raffinerie r_1	Erdöl	$c_{r_1}^{UO} = 0.6$	$n_{r_1}^{RO} = 120$	$d_{r_1}^{RO} = 1000$
Raffinerie r_2	Erdöl	$c_{r_2}^{UO} = 0.7$	$n_{r_2}^{RO} = 200$	$d_{r_2}^{RO} = 1000$
Kohleaufbereitungs-anlage r_3	Braunkohle	$c_{r_3}^{UB} = 0.4$	—	$d_{r_3}^{RB} = 100$
	Steinkohle	$c_{r_3}^{US} = 0.8$	—	$d_{r_3}^{RS} = 100$

Tabelle 2: Rohstoffbedarf, Verarbeitungseffizienz und Nebenprodukte

Eine Besonderheit gibt es bei Erdölraffinerien: Dort entsteht nicht nur raffiniertes Öl, sondern auch Nebenprodukte wie z. B. Kerosin und diverse Grundstoffe für die Chemieindustrie. Diese kann der Konzern nicht selbst verwerten, aber verkaufen. Für jede Einheit RO entstehen in Raffinerie $r \in R$ Nebenprodukte im Wert von n_r.



a) Modelliere das vorliegende Problem für allgemeine Q und R als LP, das die Kosten für den Konzern minimiert. Dokumentiere, was deine Variablen und Nebenbedingungen bedeuten. (Hinweis: Erweitere deine eigene Lösung von Blatt 1 bzw. die Musterlösung!)

b) Löse das in den Tabellen angegebene Szenario mit CPLEX oder SoPlex. Abzugeben ist die `.lp` Datei und `cplex.log`, bzw. die Ausgabe von SoPlex. Markiere in der Ausgabe die Lösung und den Zielfunktionswert und beschreibe kurz, wie die Lösung zu interpretieren ist. Die globalen Anforderungen sind 5000 Einheiten raffiniertes

		r_1	r_2	r_3
q_1	Erdöl	251	245	—
	Braunkohle	—	—	97
	Steinkohle	—	—	114
q_2	Erdöl	262	263	—
q_3	Braunkohle	—	—	14
q_4	Erdöl	20	44	—

Tabelle 3: Kosten für Transport und Einkauf

Öl, und jeweils 2000 Einheiten raffinierte Stein- und Braunkohle zu produzieren. (Hinweis: Variablen die definitiv 0 sind, dürfen in der `.lp` Datei weggelassen werden.)

($4+4$ Punkte)

Aufgabe 2 (Lösungen von LPs): Gegeben sei ein LP in der Standardform:

$$(P)\begin{cases}\max & c^Tx\\ \text{s. t.} & Ax\leq b\end{cases}$$

a) Bringe (P) in die Form

$$(\bar{P})\begin{cases}\max & \bar{c}^Tx\\ \text{s. t.} & \bar{A}x=\bar{b}\\ & x\geq 0\end{cases}$$

b) Beweise oder widerlege: Die Anzahl positiver Variablen in einer zulässigen Basislösung von (P) überschreitet nicht den Rang von A.

c) Beweise oder widerlege: Ist eine unbeschränkte Variable x_i von (P) in $(\bar{P})$ durch x_i^+ und x_i^- mit $x_i^+, x_i^- \geq 0$ modelliert worden, so ist in einer Basislösung von $(\bar{P})$ höchstens eine der beiden Variablen x_i^+ und x_i^- ungleich 0.

($2+2+2$ Punkte)

Aufgabe 3 (Basen, Nichtbasen, Basiswechsel): Gegeben ist das LP (P) in Abbildung 1 mit Ungleichungen $(1),\ldots,(8)$, dessen zulässige Lösungsmenge grau markiert ist.

a) Gib alle Basen von (P) an, deren Basislösungen im gestrichelten Bereich liegen und markiere diese in Abbildung 1. Dabei sei x_i die Schlupfvariable von Ungleichung (i). (Hinweis: Es werden nur $x_1,\ldots,x_8$ benötigt.)

b) Zeichne den Graphen G, dessen Knoten die Menge aller Basen aus der vorigen Teilaufgabe sind. Zwischen zwei Basen existiert genau dann eine Kante, wenn sie sich in nur einer Basisvariable unterscheiden. Beschrifte die Knoten mit der assoziierten Basis und die Kanten mit den auszutauschenden Variablen.

c) Seien B_1 und B_2 diejenigen zulässigen Basen, deren Basislösungen den geringsten bzw. höchsten Zielfunktionswert besitzen. Gib eine Sequenz von Basiswechseln an, die nur zulässige Basen enthält und von B_1 zu B_2 führt. Markiere diese Sequenz in Abbildung 1 und in G.

($2+2+2$ Punkte)

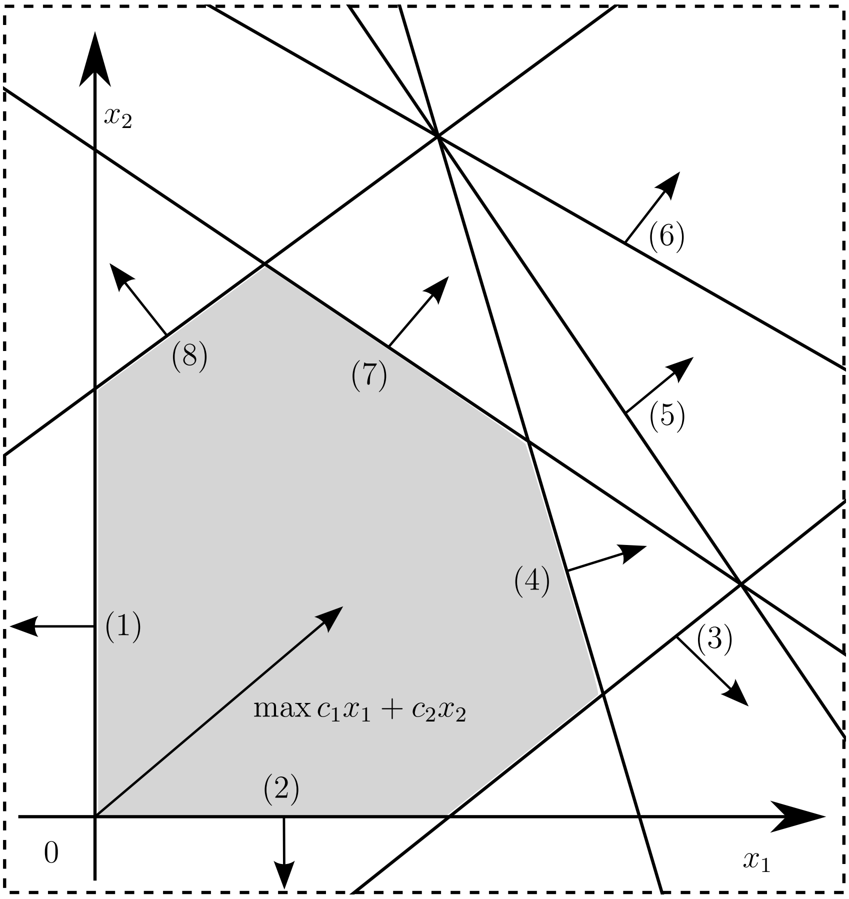


Abbildung 1: Das LP (P) aus Aufgabe 3