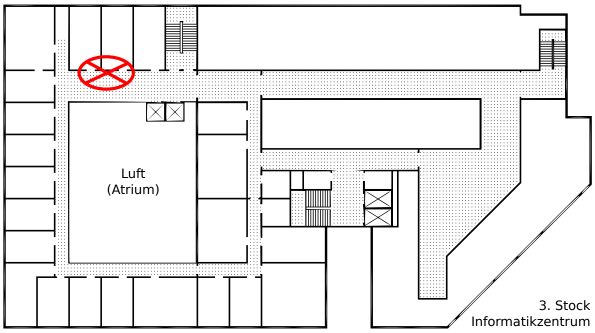
Abteilung Algorithmik **Winter 2012/13**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Alexander Kröller
Stephan Friedrichs
Jan Kokemüller

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 2 vom 19. 11. 2012

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 3. 12. 2012, entweder in der Übung im PK 2.2 oder bis 14:45 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Matrikelnummer versehen!



Aufgabe 1 (LP grafisch): Betrachte das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcrl} \min & x_1 & + & x_2 & \\ \text{s. t.} & x_1 & + & 3x_2 & \geq 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq 8 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & \leq 40 \\ & x_1 & & & \leq 8 \\ & x_1 & & & \geq 0 \\ & & & x_2 & \geq 0 \end{array}\right.$$

a) Schreibe das lineare Programm in den Standardformen $\min\{c^T x \mid Ax \leq b\}$ sowie $\min\{c^T x \mid Ax = b, x \geq \mathbf{0}\}$. Die Matrixschreibweise ist nicht gefordert. (Hinweis: Letztere Darstellung braucht nur 4 Gleichungen.)

b) Zeichne das LP und markiere die zulässigen Lösungen. Eine Zeichnung des Bereichs $[0, 10] \times [0, 10]$ reicht aus.

c) Markiere in deiner Zeichnung alle Basislösungen im Bereich $[0, 10] \times [0, 10]$. Gib für jede davon Basis und Nichtbasis an, ob die Lösung zulässig und ob sie degeneriert ist.

d) Bestimme grafisch eine optimale Basis B des LP und berechne die Optimallösung x^* mithilfe von $x^*_B = A_B^{-1} b$ und $x^*_N = \mathbf{0}$. Überprüfe die Zulässigkeit von x^* durch Berechnung von Ax^*.

($1 + 1 + 2 + 2$ Punkte)

Aufgabe 2 (Lösungsmengen von LPs): Betrachte ein LP in der Standardform

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s. t.} & Ax & \leq & b \\ & x & \in & \mathbb{R}^m \end{array}\right.$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei sei $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ die Menge der zulässigen Lösungen von (P). Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) Es gilt immer $L \neq \emptyset$.

b) Wenn $L \neq \emptyset$, dann existiert auch $\max\{c^T x \mid x \in L\}$.

c) Wenn $\max\{c^T x \mid x \in L, x \text{ Basislösung}\}$ existiert, ist es eindeutig.

d) L ist konvex.

e) Wenn wir in (P) die kontinuierlichen Variablen durch ganzzahlige ersetzen, ist das Resultat (Q) mit

$$(Q)\left\{\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s. t.} & Ax & \leq & b \\ & x & \in & \mathbb{Z}^m \end{array}\right.$$

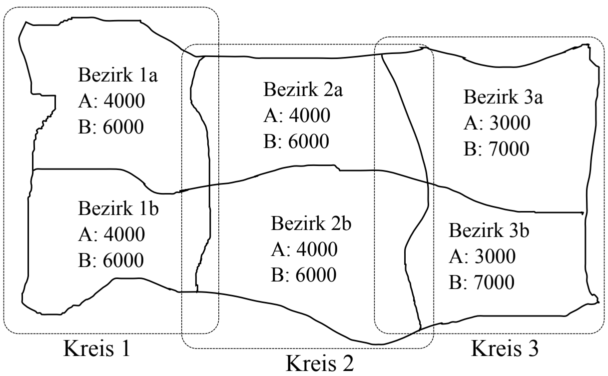
wieder ein LP.

($1 + 1 + 1 + 1 + 2$ **Punkte)**

Aufgabe 3 (Gerrymandering): Aus aktuellem Anlass[1] stellen wir uns einmal vor, wir seien die Parteistrategen der derzeit regierenden Partei A. Die einzige Konkurrenzpartei ist B. Unsere Partei hat leider in der vergangenen Zeit nur Mist produziert, unsere Zustimmung ist auf einem historischen Tiefstand von 22,5%. Zum Glück sind wir noch Regierungspartei und können daher, dank Gerrymandering, bei der anstehenden Wahl trotzdem gewinnen!

Angenommen, unser Wahlsystem sei indirekt. Es gibt Wahlkreise, in denen jeweils ein Wahlmann mittels einfacher Mehrheit bestimmt wird. Die Wahlmänner der Wahlkreise bestimmen wiederum den Wahlgewinner. Die Wahlkreise sind in Wahlbezirke aufgeteilt, der Einfachheit halber so, dass jeweils 10000 Wähler zu einem Wahlbezirk gehören.

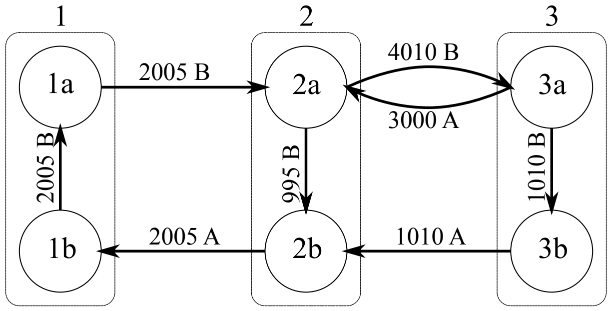
Zum Beispiel könnte die Situation folgendermassen aussehen: Es gibt drei Wahlkreise 1, 2 und 3, die in jeweils zwei Wahlbezirke à 10000 Wähler aufgeteilt sind.



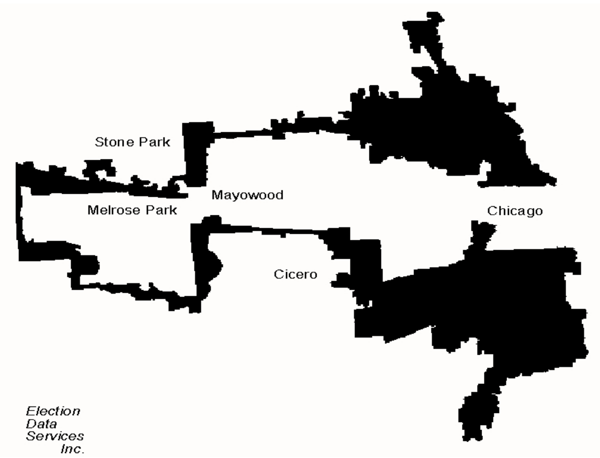
[1] http://www.washingtonpost.com/blogs/wonkblog/wp/2012/11/08/how-redistricting-could-keep-the-house-red-for-a-decade/

Unsere Partei wird in jedem der drei Wahlkreise von B geschlagen (in Kreis 1 mit 8000:12000 Stimmen, in 2 ebenfalls, in 3 mit 6000:14000). Also kommen alle drei Wahlmänner aus Partei B und wählen natürlich B zur Siegerpartei.

Aber jetzt kommt das Gerrymandering: Da wir die Wahlmodalitäten bestimmen, können wir die Grenzen der Wahlbezirke verschieben, wodurch wir die Wähler anderen Wahlbezirken zuordnen können. Natürlich wissen wir genau, wie die einzelnen Leute stimmen werden. Wir ordnen die Grenzen so, dass Wähler folgendermassen wandern:



Jetzt haben immer noch alle Wahlbezirke 10000 Wähler – wir haben also nichts schlimmes gemacht. Allerdings gewinnen wir jetzt Wahlkreise 1 und 2 sehr knapp mit 10005:9995 Stimmen und verlieren Wahlkreis 3 mit katastrophalen 1990:18010 Stimmen. Damit stellen wir 2 der 3 Wahlmänner selbst und gewinnen die Wahl. Es werden 6015 A-Wähler anderen Bezirken zugeordnet. Denen schicken wir eine kleine Aufmerksamkeit. Den 10025 verschobenen B-Wählern schicken wir nichts. Reale vom Gerrymandering geformte Wahlbezirke sehen zum Beispiel so aus[2]:



a) Formuliere ein LP für folgendes Problem: Es soll bestimmt werden, wie Wähler zwischen den Wahlbezirken verschoben werden sollen, so dass

- Die Größe der Wahlbezirke nicht verändert wird.
- In einer vorgegebenen Teilmenge der Wahlkreise (typischerweise werden das $|K|/2 + 1$ sein) die Wahl mit einem Vorsprung von jeweils mindestens 15 Stimmen gewonnen wird.
- So wenige A-Wähler wie möglich verschoben werden. Hierbei ist es OK, wenn ein A-Wähler, der über mehrere Wahlbezirke geschoben wird, auch mehrfach gezählt wird.

[2] `http://www.senate.leg.state.mn.us/departments/scr/REDIST/Draw/Draw992web.htm`

- Es dürfen Wähler über mehrere Wahlbezirksgrenzen hinweg verschoben werden.

Wir lassen (eigentlich unkorrekt) auch fraktionale Wählerwanderungen zu, bei 10000 Personen je Wahlbezirk kommt es auf den Einzelnen nicht mehr an.

b) Auf der VL-Homepage finden sich die ZIMPL-Dateien `gerry1.zpl` und `gerry2.zpl`. `gerry1.zpl` beschreibt das oben genannte Beispiel, um euch den Einstieg zu erleichtern. `gerry2.zpl` ist ein größeres Szenario mit 100 Wahlkreisen, 10000 Wahlbezirken und 100 Millionen Wählern, von denen 22,5% A wählen.

Beide ZIMPL-Dateien definieren die folgenden Parameter:

KREISE Menge aller Wahlkreise.

WINKREISE Menge derjeniger Wahlkreise, die wir gewinnen wollen.

KBEZ$[k]$ Menge aller Wahlbezirke, die dem Wahlkreis k zugeordnet sind.

BEZIRKE Menge aller Wahlbezirke.

N$[b]$ Menge aller Nachbarbezirke von Wahlbezirk b, also aller Bezirke, mit denen man durch Grenzverschiebungen Wähler austauschen kann.

A$[b]$ Anzahl Wähler von Partei A in Bezirk b, alle anderen SIZE-A$[b]$ wählen B.

E Menge aller gerichteter Tauschkanten: Wenn b_1 und b_2 benachbarte Bezirke sind, sind die Paare (b_1, b_2) und (b_2, b_1) in `E`.

SIZE Anzahl Wähler je Wahlbezirk (also 10000).

Erweitere `gerry2.zpl` so, dass es das LP aus Teil a) enthält. Löse das Problem mit ZIMPL und CPLEX oder SoPlex. Wie viele Variablen und wieviele Nebenbedingungen hat deine Formulierung?

Abzugeben sind hier nur der von dir geschriebene ZIMPL-Code sowie der relevante Teil von `cplex.log` bzw. die Ausgabe von SoPlex, *nicht* die Ausgabe von `display solution`.

(Hinweis: Auf der VL-Homepage[3] ist das ZIMPL User Guide verlinkt.)

(4 + 4 Punkte)

[3] `http://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws1213/mma/`