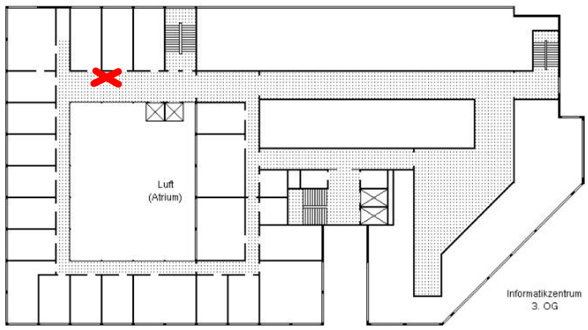
Abteilung Algorithmik **Winter 2012/13**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Alexander Kröller
Stephan Friedrichs
Jan Kokemüller

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 1 vom 05. 11. 2012

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 19. 11. 2012, entweder in der Übung im PK 2.2 oder bis 14:45 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Matrikelnummer versehen!



Aufgabe 1 (Standardformen von LPs): Gegeben ist folgendes lineares Optimierungsproblem:

$$
(P)\left\{\begin{array}{lrcrcrcrl}
\min & 5x_1 & + & 7x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & \\
\text{s.t.} & 4x_1 & - & 3x_2 & & & & & \geq 4 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \geq 12 \\
 & & & x_2 & & & - & x_4 & = 5 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq 50 \\
 & x_1 & & & & & & & \text{frei} \\
 & & & x_2 & & & & & \text{frei} \\
 & & & & & x_3 & & & \leq 2 \\
 & & & & & & & x_4 & \geq 0
\end{array}\right.
$$

Bringe das LP auf folgende Formen:

a) $\max c^T x$, s. t. $Ax \leq b$, x frei

b) $\min c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq \mathbf{0}$

c) $\max \mathbf{0}^T x$, s. t. $Ax \geq b$, x frei, also mit konstanter Zielfunktion. Dabei sei der optimale Zielfunktionswert c_0 von (P) bekannt.

Die Matrizen und Vektoren müssen jeweils nicht explizit angegeben werden, es reicht die Darstellung als Gleichungs- bzw. Ungleichungssystem. **($2+3+3$ P.)**

Quelle	Rohstoff	Kapazität
Lieferant q_1	Erdöl	5000
	Braunkohle	5000
	Steinkohle	5000
Pipeline q_2	Erdöl	500
Konzerneigene Kohlegrube q_3	Braunkohle	400
Konzerneigene Bohrinsel q_4	Erdöl	1200

Tabelle 1: Kapazitäten der Rohstoffquellen

Aufgabe 2: Einer Schokoladenfirma droht die Pleite, weil ihre Konkurrenz nicht nur die besseren Rezepte hat, sondern auch noch mithilfe von LPs Einkauf, Vertrieb und Rezeptdetails kostenoptimal plant. Deswegen wurde ein Industriespion mit einem im Boden einer Kaffetasse versteckten USB Stick engagiert, um diese LPs samt diverser zulässiger Lösungen zu stehlen. Das gelang ihm auch, nur leider war der USB Stick nicht wasserfest verbaut und die Daten sind stark beschädigt.

Die IT konnte jedoch eines der betroffenen LPs mitsamt immerhin einer zulässigen Lösung $x^t = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,\ 4.42,\ 2,\ 0)$ teilweise wiederherstellen:

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcrcrcrl} \max & 20x_1 & + & 20x_2 & + & 24x_3 & + & 16x_4 & \\ \text{s. t.} & -x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & & & \geq -13 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq 11 \\ & & & x_2 & + & 7x_3 & & & \leq 34 \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & x_1 & \dots & x_4 & \geq 0 \end{array}\right.$$

Allerdings fehlen sehr viele Zeilen des LPs und es ist lediglich bekannt, dass x zulässig ist, nicht aber, wie nahe x am Optimum liegt. Das Ausrechnen einer neuen Lösung wird durch die fehlenden Ungleichungen unmöglich gemacht.

Hilf der maroden Schokoladenfirma, indem du bestimmst, wie weit x vom Optimum entfernt ist. **(4 P.)**

Aufgabe 3 (Modellierung): Ein Energiekonzern möchte die Lieferungen von Rohstoffquellen und -anbietern zu Raffinerien neu organisieren. Davon sind zunächst drei Rohstofftypen $U \in \{UO, UB, US\}$ (unraffiniertes Erdöl und unraffinererte Braun- bzw. Steinkohle) betroffen.

Es gibt konzerneigenen Rohstoffabbau sowie externe Zulieferer für jeden dieser Rohstofftypen, die als Quellen Q zusammengefasst sind. Jedes $q \in Q$ hat für jeden Rohstofftypen $u \in U$ eine Höchstkapazität k_q^u (hat Lieferant q z. B. kein Erdöl im Angebot, ist $k_q^{UO} = 0$). Beliefert werden sollen Raffinerien R, die jeweils in der Lage sind, bestimmte Rohstoffe aus U zu verarbeiten. Der Bedarf von Rohstoff $u \in U$ in Raffinerie $r \in R$ ist d_r^u.

Selbstverständlich werden keine Rohstoffe verschenkt und die Lieferungskosten hängen nicht nur vom jeweiligen Anbieter ab, sondern auch vom zurückzulegenen Transportweg. Der Preis, eine Einheit von Rohstoff $u \in U$ von Anbieter $q \in Q$ zu kaufen und zu Raffinerie $r \in R$ zu transportieren, ist t_{qr}^u pro Einheit.

Raffinerie	Rohstoff	Bedarf
Raffinerie r_1	Erdöl	1500
Raffinerie r_2	Erdöl	2500
Kohleaufbereitungsanlage r_3	Braunkohle	800
	Steinkohle	1200

Tabelle 2: Rohstoffbedarf

		r_1	r_2	r_3
q_1	Erdöl	251	245	—
	Braunkohle	—	—	97
	Steinkohle	—	—	114
q_2	Erdöl	262	263	—
q_3	Braunkohle	—	—	14
q_4	Erdöl	20	44	—

Tabelle 3: Kosten für Transport und Einkauf

a) Modelliere das obige Problem für allgemeine U, Q und R als LP, welches die Kosten minimiert. Dokumentiere, was deine Variablen und Nebenbedingungen bedeuten.

b) Löse das in den Tabellen angegebene Szenario mit CPLEX oder SoPlex. Abzugeben ist die `.lp` Datei und `cplex.log`, bzw. die Ausgabe von SoPlex. Markiere in der Ausgabe die Lösung und den Zielfunktionswert und beschreibe kurz, wie die Lösung zu interpretieren ist. (Hinweis: In `cplex.log` wird *alles* mitgeschrieben, was ihr mit cplex versucht habt, bitte gebt nur den relevanten Teil ab.)

(4 + 4 P.)