I. Orga
II. Hashing
III. Aufgaben

Gü, 31.01.13

I. Orga

- Klausur 19.2., 12.00 – 14.00
- Raumeinteilung → siehe HP + mail!
  (AM, Halle, Di 24.1, Di 24.3)

- Hilfsmittel → keine
- ok: Wörterbuch! (für „Nicht-Muttersprachler")
- mitzubringen: I-Bescheinigung
  Perso

II Hashing

- mit verketteten Listen
- mit offener Adressierung

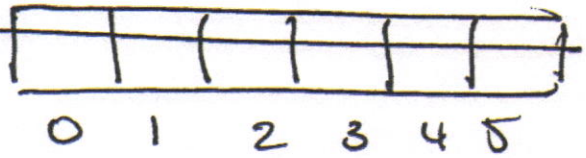
[zur Kollisionsbehandlung]

→ Hashfunktion mit „Zähler" – Nummer des Einfügeversuchs als Parameter

$t(i,x)$ = Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x

~~Beispiel:~~

~~Schlüssel: 1, 7, 16~~



~~$t(i,x) = (x+i) \bmod 6$~~

→ Division mit Rest / Modulorechnung

zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$

$$a = c \cdot b + r \quad , r \in \{0, \dots, b-1\}$$

r ↑ Rest

$$(a \bmod b) = r$$

Beispiel:

$21 \bmod 4 = 1$, denn $21 = 5 \cdot 4 + 1$

$i=2$: $t(2,5)=7$ kollision

$i=3$: $t(3,5)=8$ $5 \longrightarrow A[8]$

VII

<u>$x=18$:</u>

$i=0$: $t(0,18)=6$ kollision

$i=1$: $t(1,18)=7$ kollision

$i=2$: $t(2,18)=8$ kollision

$i=3$: $t(3,18)=9$ $18 \longrightarrow A[9]$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
					17	41	6	5	18		

Beispiel:

Schlüssel: 1, 7, 19

0	1	2	3	4	5
	1	7	19		

$t(i,x) = (x+i) \bmod 6$ $\quad i=0,1,\ldots$

$t(0,1) = 1$

$t(0,7) = 1$ Kollision

$t(1,7) = 2$

$t(0,19) = 1$ Kollision

$t(1,19) = 2$ Kollision

$t(2,19) = 3$

Klausuraufgabe WS 07/08

$t(i,x) = (x+i) \bmod 12$

$A[0], A[1], \ldots, A[11]$

Schlüssel: 17, 41, 6, 5, 18

x=17:

$i=0$: $t(0,17) = 5$ $\quad 17 \rightarrow A[5]$

x=41:

$i=0$: $t(0,41) = 5$ Kollision

$i=1$: $t(1,41) = 6$ $\quad 41 \rightarrow A[6]$

x=6:

$i=0$: $t(0,6) = 6$ Kollision

$i=1$: $t(1,6) = 7$ $\quad 6 \rightarrow A[7]$

x=5:

$i=0$: $t(0,5) = 5$ Kollision

$i=1$: $t(1,5) = 6$ Kollision

SoSe 10

5.Aufgabe: Hashing — 11 Punkte

Wir betrachten ein leeres Array A der Größe 9, d.h. es gibt die Speicherzellen $A[0], A[1], \ldots, A[8]$; in diesem führen wir offenes Hashing mit der folgenden Hashfunktion durch:

$$t(i, x) = (2x + i^2) \bmod 9$$

Dabei ist x ein einzusetzender Schlüssel und i die Nummer des Versuches, x in eine unbesetzte Speicherzelle des Arrays zu schreiben (beginnend bei $i = 0$).
Berechne zu jedem der folgenden Schlüssel die Position, die er in A bekommt:

$$5, 23, 20, 18, 7$$

(Hinweis: Die Schlüssel sollen in der gegebenen Reihenfolge eingefügt werden und der Rechenweg sollte klar erkennbar sein.)

Trage die Elemente in folgendes Array ein:

0	18
1	5
2	23
3	
4	20
5	7
6	
7	
8	

Insert(5): $t(0,5) = 10+0 \bmod 9 = 1$ frei

Insert(23): $t(0,23) = 46 \bmod 9 = 1$ Kollision

$t(1,23) = 2 \cdot 23 + 1^2 = 47 \bmod 9 = 2$ frei

Insert(20): $t(0,20) = 40 \bmod 9 = 4$ frei

Insert(18): $t(0,18) = 36 \bmod 9 = 0$ frei

Insert(7): $t(0,7) = 14 \bmod 9 = 5$ frei

Insert(27)

6.Aufgabe: Sortieren **5+3 Punkte**

a) Eine lineare Liste $A[1, \ldots, n]$ soll sortiert werden. Das Sortierverfahren Bubblesort ist wie folgt definiert:

Algorithm 1: Bubblesort(A, n)

```
begin
    for j := n − 1 DOWNTO 1 do
        for i := 1 TO j do
            if A[i] < A[i + 1] then
                vertausche (A[i], A[i + 1])
```

Zeige die Korrektheit des Verfahrens und analysiere sein Zeitverhalten.

Korrektheit: In der inneren Schleife wird jeweils das kleinste Element des Bereichs [1 ... j+1] bis zur Stelle j+1 nach hinten verschoben.
(analog zum Aufsteigen von Luftblasen → Bubble-Sort)
Aufgrund der äußeren Schleife erfolgt daher schrittweise die Sortierung vom Ende des Feldes ausgehend
⇒ absteigend sortierte Folge

Zeitverhalten: $T(n) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$
$= O(n^2)$
[unabh. vom Input]

$f \in \Omega(g)$: $\exists c_0 > 0, n_0 \in \mathbb{N}: 0 \leq c_0 \cdot g(n) \leq f(n) \; \forall n \geq n_0$

$g \in \Theta(h)$: $\exists c_1, c_2 > 0, n_1 \in \mathbb{N}: 0 \leq c_1 \cdot h(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot h(n) \; \forall n \geq n_1$

3.Aufgabe: Komplexität

3+3+3+3 Punkte

Seien $f, g, h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ drei Funktionen. Sei $f \in \Omega(g)$ und $g \in \Theta(h)$.

a) Zeige oder widerlege: $f \in O(h)$

$f \in O(h) \Leftrightarrow \exists c_3 > 0, n_3 \in \mathbb{N}: 0 \leq f(n) \leq c_3 \cdot h(n) \; \forall n \geq n_3$

Widerlege:

$f(n) = n^2$

$g(n) = n$

$h(n) = n$

$n^2 \nleq c \cdot n$ für Konstante c und $n \geq n_3$, für bel. $n_3 \in \mathbb{N}$

b) Zeige oder widerlege: $f \in \Theta(h)$

siehe a) ($f \notin O(h)$!)

Zeig oder widerlege: $g \in O(f)$

$g \in O(f) \Leftrightarrow \exists c_4 > 0, n_4 \in \mathbb{N}: 0 \leq g(n) \leq c_4 \cdot f(n)$

$f \in \Omega(g) \Rightarrow \exists c_0 > 0, n_0 \in \mathbb{N}: 0 \leq c_0 g(n) \leq f(n) \; \forall n \geq n_0$

Wähle $c_4 = \frac{1}{c_0} \geq 0$, $n_4 := n_0$, dann gilt:

$0 \leq g(n) \leq c_4 \cdot f(n) \; \forall n \geq n_0$

b) Zeichnen einen (zusammenhängenden) Graphen mit 7 Knoten, der eine Eulertour und einen Hamiltonpfad, aber keinen Hamiltonkreis hat. Kennzeichne Eulertour und Hamiltonpfad.

c) Beweise, dass es in jedem zusammenhängenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ einen Knoten $v \in V$ gibt, nach dessen Entfernung der Graph zusammenhängend bleibt.
Hinweis: Betrachte den DFS-Baum für G.

Betrachte bel. Knoten $x \in V$ und starte DFS in x.
Der entstehende DFS-Baum T hat mind. ein Blatt.
Das Entfernen eines Blattes erhält den Zshg., da $T \setminus \{v\}$ immer noch ein Baum in G ist, und über die Kanten von $E(T \setminus \{v\})$ je ein Pfad zwischen bel. Knoten in $V \setminus \{v\}$ besteht.