Satz 2.5 (Euler)

(1) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen Eulerweg haben, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.

(2) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen geschlossenen Eulerweg haben, wenn alle Knoten geraden Grad haben.

Beweis: Siehe oben! $\square$

Fragen:

(I) Was ist mit Graphen, in denen nur ein Knoten ungeraden Grad hat?

(II) Die Bedingungen oben sind notwendig, d.h. müssen auf jeden Fall erfüllt werden, wenn es eine Chance auf einen Eulerweg geben soll. Sind sie auch hinreichend, d.h. gibt es bei Erfüllung auch wirklich einen Weg?

(III) Wie findet man einen Eulerweg?

(III') Wie sieht ein Algorithmus zum Finden eines Eulerweges aus?

Antwort auf (I) – etwas allgemeiner:

Satz 2.6

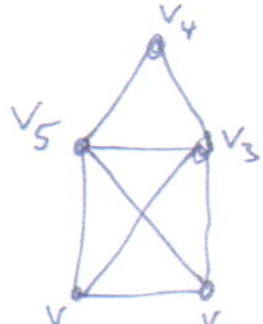
Für jeden beliebigen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad eine gerade Zahl.

Beweis:

In Aufgabe 3 (b) des Übungsblattes 1 zeigt man, dass
$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m \text{ ist,}$$
d.h. die Summe aller Grade ist eine gerade Zahl. Das kann nur dann der Fall sein, wenn es eine gerade Zahl von ungeraden Summanden $\delta(v_i)$ gibt. $\square$

Es kann also nicht vorkommen, dass es nur einen Knoten mit ungeradem Grad gibt.

Vorüberlegung zu (II) und (III):



F: (i) Wo beginnen, wo enden?
(ii) Wie laufen?

A: (i) In v_1 und v_2 (ungerade Knoten!)

(ii) z.B.
$v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1, v_5, v_3, v_2$

oder $v_1, v_2, v_5, v_1, v_3, v_5, v_4, v_3, v_2$

Stand:

Wir wissen, dass ein Graph G nur dann

- einen Eulerweg haben kann, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.
- eine Eulertour haben kann, wenn alle Knoten geraden Grad haben.

Definition 2.7

Ein Graph heißt Eulersch, wenn alle Knoten geraden Grad haben.

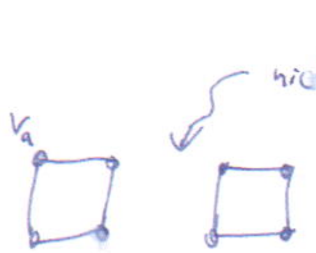
Wie sieht es umgekehrt aus?!

Gegen ein Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- der eulersch ist. Hat er eine Eulertour?

Nein, Vorsicht!

nicht zusammenhängend!



Der Graph sollte schon zusammenhängend sein!

Also: Gegeben ein zusammenhängender Graph G, der
- nur zwei ungerade Knoten hat. Hat er einen Eulerweg?
- eulersch ist. Hat er eine Eulertour?

GRUNDTECHNIK:
Um zu sehen, wo man etwas richtig machen muss, überlegt man sich, wie man etwas falsch machen kann!

Was MUSS man bei der Konstruktion eines Weges machen?

$v_1, e_{1,2}, v_2, e_{2,3}, \dots, v_{k+1}$ – ohne doppelt verwendete Kanten!

[Lesung aus GdkW. – S. 188-190 !]

Versuch:

Algorithmus 2.8 (Weg in Graphen)

Input: ~~Gegeben~~ Graph G mit höchstens 2 ungeraden Knoten
Output: Ein Weg in G

(1) Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig), setze $i = 0$

(2) Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:
  (a) Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$
  (b) Laufe zum Nachbarknoten v_j
  (c) Lösche die Kante aus der Menge der unbenutzten Kanten.
  (d) Setze $v_{i+1} := v_j$
  (e) Setze $i := i+1$

(3) STOP

Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.8 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also tatsächlich ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg. ~~[Auch wenn wir diesen hier der Einfachheit halber nicht explizit abgespeichert haben.]~~

(iii) Ist v_a ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch, stoppt der Algorithmus in v_0, liefert also einen geschlossenen Weg.

Beweis:

(i) Bei jedem Durchlaufen der Schleife ⓐ-ⓓ wird in ⓒ eine Kante entfernt. Dies kann nur endlich oft passieren.

(ii) Nach Konstruktion erhalten wir eine Kantenfolge; keine Kante wird doppelt verwendet.

(iii) Ein gerader Knoten ~~verbindet / genauso viele Knoten zum~~ wird genauso oft betreten wie ~~zum~~ verlassen, also kann der Algorithmus weder im Startknoten noch in einem geraden Knoten stoppen; es bleibt nur der andere ungerade Knoten.

(iv) Wie in (iii) kann der Algorithmus in keinem geraden Knoten stoppen, der nicht der Ausgangsknoten ist; es bleibt nur der Startknoten.

$\square$