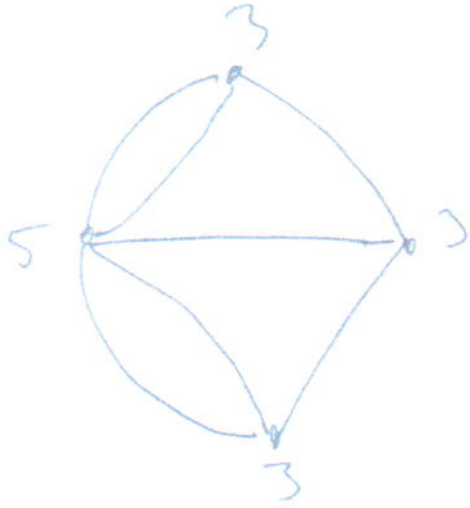


Das ist hier nicht der Fall, also gibt es keinen solchen Weg! □

15.11.11

Leonhard Euler (* 15.4.1707 in Basel
+ 18.9.1783 in St. Petersburg)

13 1720 Studienbeginn in Basel
16 1723 Magister
20 1727 Berufung an Petersburger Akademie
24 1731 Professor für Physik

(Heute nicht mehr möglich?

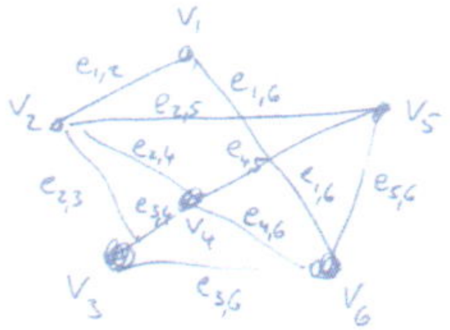
Erik Demaine * 28.2.1981 in Halifax, Kanada

12 1993 Studienbeginn in Kanada
14 1995 Bachelor
15 1996 Master
20 2001 Doktor
20 2001 Assistenzprofessor am MIT
24 2005 Professor am MIT

Arbeitsgebiet: Algorithmik)

Euler hat eine Instanz betrachtet, aber dann gleich ein Problem untersucht & – und dabei ein neues Gebiet begonnen: die Graphentheorie.

<u>Definition 2.2</u> (Graphen)



Knoten: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

Kanten: $e_{1,2}, e_{1,6},$
$e_{2,3}, e_{2,4}, e_{2,5}$
$e_{3,4}, e_{3,6}$
$e_{4,5}, e_{4,6}$
$e_{5,6}$

Bezeichnungen:

Knotenmenge V ("vertices")

Kantenmenge E ("edges")

~~(1) Ein Graph G ist~~

Schreibweise:

$$G = (V, E)$$

Für alle Kanten gilt: e hat zwei Elemente

Mathematisch: $\forall\, e \in E \subseteq 2^V : |e| = 2$

Unter Umständen auch möglich:

- Parallele Kanten  → Euler!
- Schleifen 

Jetzt formaler:

(1) (i) Ein ungerichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, Ψ), für das

(a) V und E endliche Mengen sind

(b) $\Psi : E \to \{ X \subseteq V \mid 1 \leq |X| \leq 2 \}$

Kardinalität von X!

(Also: Jede Kante enthält einen oder zwei Knoten)

Schleifen

(ii) V ist die Knotenmenge

(iii) E ist die Kantenmenge

(2) (i) Zwei Kanten e und e' sind parallel, wenn $\Psi(e) = \Psi(e')$.

(ii) e ist eine Schleife, wenn $\Psi(e) = 1$ ist

(iii) Ein Graph ohne parallele Kanten und ohne Schleifen heißt „einfach" und man schreibt auch einfach (!) $G = (V, E)$; $E(G)$ ist die Kantenmenge von G

(iv) In einem einfachen Graphe kann man $\{v_i, v_j\}$ für eine Kante e_{ij} zwischen v_i und v_j schreiben

(v) $|E|$ ist die Anzahl der Kanten von G.

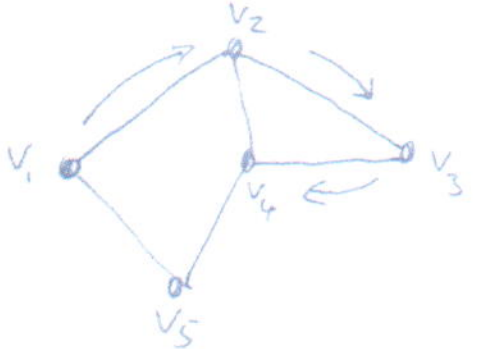
(vi) Oft verwendet man den Buchstaben

n für $|V|$, die Anzahl der Knoten

m für $|E|$, die Anzahl der Kanten.

□

Jetzt wollen wir uns Gedanken machen um die Art und Weise, wie man in einem Graphen umherwandern kann!



Laufe von v_1
nach v_2
nach v_3
nach v_4 !

Definition 2.3 (Wege in Graphen)

(1) (i) Eine Kante $e = \{v, w\}$ verbindet v und w, und v und w sind adjazent („benachbart"), v ist Nachbar von w.

(ii) Außerdem ist v inzident zu e
($\hat{=}$ „zusammentreffend mit")

(2) (i) Ein Teilgraph $H = (V(H), E(H))$ eines Graphen $G = (V(G), E(G))$ ist ein Graph mit

$$V(H) \subseteq V(G)$$
$$E(H) \subseteq E(G)$$

Teilmengen!

(ii) H ist aufspannend, wenn $V(H) = V(G)$.
(Alle Knoten sind mit dabei!)

(3) (i) Eine Kantenfolge W in G ist eine Folge

$$v_1, e_{1,2}, v_2, e_{2,3}, v_3, \ldots, e_{k,k+1}, v_{k+1}$$

mit $k \geq 0$, $e_{i,i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$.

(ii) Wiederholt sich keine Kante in einer Kantenfolge, dann spricht man von einem Weg.

(iii) Wiederholt sich kein Knoten, spricht man von einem Pfad.

(iv) Ein geschlossener Weg ~~oder / Pfad~~ kehrt am Ende zum Startknoten zurück

(v) Ein ~~geschlossener~~ Kreis ist ein geschlossener Pfad (→ Rückkehr zum Anfangsknoten)

(vi) Ein Eulerweg benutzt alle Kanten eines Graphen, eine Eulertour kehrt zum Anfang zurück.

(vii) Ein Hamiltonpfad besucht alle Knoten eines Graphen.

(viii) Ein Hamiltonkreis ~~ist~~ besucht alle Knoten eines Graphen und kehrt zum Anfangsknoten zurück. (Alternativer Name: „Tour")

Sir William Hamilton *1805 †1865

(4) Ein Graph ist zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt.

(5) Der Grad eines Knotens ist die Anzahl der inzidenten Kanten. (Schreibweise: $\delta(v)$) □

Damit können wir jetzt sauber definieren:

Problem 2.4 (Eulerweg)

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Ein Eulerweg W - oder ein Argument, dass kein Eulerweg existiert.