Dafür setzen wir

$$S_{ij} := \{s_i, \ldots, s_j\}$$

Dann ist

$$P(s_i \text{ wird mit } s_j \text{ verglichen}) = P(s_i \text{ oder } s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij})$$

- denn wird zuerst ein Pivot dazwischen gewählt, werden $s_i$ und $s_j$ nicht mehr verglichen!

Da nur einer von $s_i$ und $s_j$ erster Pivot sein kann, gilt

$$\begin{aligned} & P(s_i \text{ oder } s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij}) \\ = \; & P(s_i \text{ ist erster Pivot in } S_{ij}) \\ & + P(s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij}) \\ = \; & \frac{1}{j-1+1} + \frac{1}{j-1+1} = \frac{2}{j-1+1} \qquad (**) \end{aligned}$$

- denn die Pivots werden zufällig und unabhängig gewählt, und die Menge $S_{ij}$ hat $j-1+1$ Elemente.

Jetzt kombinieren wir (*) und (**):

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

↓ Setze $k = j-i$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1}$$

$$< \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}$$

Jetzt kann man die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n}$$

abschätzen:

$$\leq \underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1} \ldots + \frac{1}{2^{\log_2 n}}$$

$1 + \log_2 n$ Einsen →

Also
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \log_2 n \,, \quad \text{d.h.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \in \Theta(\log n)$$

Und damit

$$E[X] \in \Theta(n \log n) .$$

$\square$