25.01.2012

KAPITEL 5: SORTIEREN

5.0 Vorspann: Sortieren von Übungszetteln

5.1 Sortieren und Permutationen

Gegeben: Eine Menge von Objekten $x_1, \dots, x_n$,
eine Größerrelation „$<$", die
je zwei Objekte ordnet
(→ Totalordnung!)

Gesucht: Eine Sortierung der Objekte nach Reihenfolge.

Bemerkungen:

(1) Wir schreiben der Einfachheit halber

$$x_i < x_j$$

bzw $x_j < x_i$

(und gehen wie gesagt davon aus, das eines davon gilt)

(2) Statt die Objekte in der vorgegebenen Reihenfolge hinzuschreiben, reicht es auch, die Permutation zu kennen, die die Anordnung beschreibt.

Satz 5.1

(1) Für n Objekte $x_1, \ldots, x_n$ benötigt man zum Sortieren mindestens $\Omega(n \log n)$, wenn man die Objekte nur paarweise vergleichen kann.

Beweis:

(1) (a) Am Anfang hat man $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ viele mögliche Permutationen.

(b) Jeder Vergleich teilt die Menge der verbliebenen Permutationen in zwei Teilmengen

(c) Im schlechtesten Falle bleibt die größere Teilmenge übrig, na

(d) Man erreicht also bestenfalls eine Halbierung.

(e) Bis man eine eindeutige Permutation sicher identifiziert hat, braucht man also mindestens

$$\log_2(n!)$$

Vergleiche.

(f)
$$\log_2(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log_2 n$$

$$\geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log_2 n$$

$$\geq \frac{n}{2}\left(\log_2 \frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\log_2 n - 1\right)$$

$$\in \Omega(n \log n)$$

∎

5.2. Mergesort

Wir wollen folgende Zahlen sortieren (aufsteigend nach Größe):

A: 8 3 9 6 3 11 7 12

↳ Idee: ① Finde Minimum in A.
② Kopiere Minimum nach B (Array)
③ Lösche Minimum in A

→ Selection Sort nicht die effizienteste Lösung!

Durchlauf

1 B: 3

2 B: 3 3

3 B: 3 3 6

⋮

8 B: 3 3 6 7 8 9 11 12

Laufzeit?

Speicherplatz?

Verwaltet man einen Pointer auf das Ende von B und hat man einen Pointer auf das aktuelle Minimum können ② und ③ in $O(1)$ ausgeführt werden.

Für ① braucht man im schlechtesten Fall

1. Durchlauf $n-1$ Schritte / Vergleiche
2. " $n-2$ "
:
i. " $n-i$ "

$\Rightarrow$ Insgesamt $\sum_{i=1}^{n} n-i = n^2 - \frac{n}{2}\cdot(n+1) = n^2 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

$= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \in O(n^2)$

Vergleiche

Satz 5.1 gibt eine untere Schranke für die Anzahl der Vergleiche von $\Omega(n \log n)$.

Speicherplatz? 2. A

↳ Auch das geht besser: „In-Place-Sorting"

Zurück zur Laufzeit:

Der Algorithmus „Mergesort" kommt mit $O(n \log n)$ Vergleichen aus. Dabei wird das algorithmische Prinzip „Divide and Conquer" (Teile und herrsche) verwendet.

Zunächst am obigen Beispiel:

8 3 9 6 | 3 11 7 12

Teile: 8 3 9 6 ; 3 11 7 12

Teile: 8 3 | 9 6 ; 3 11 | 7 12

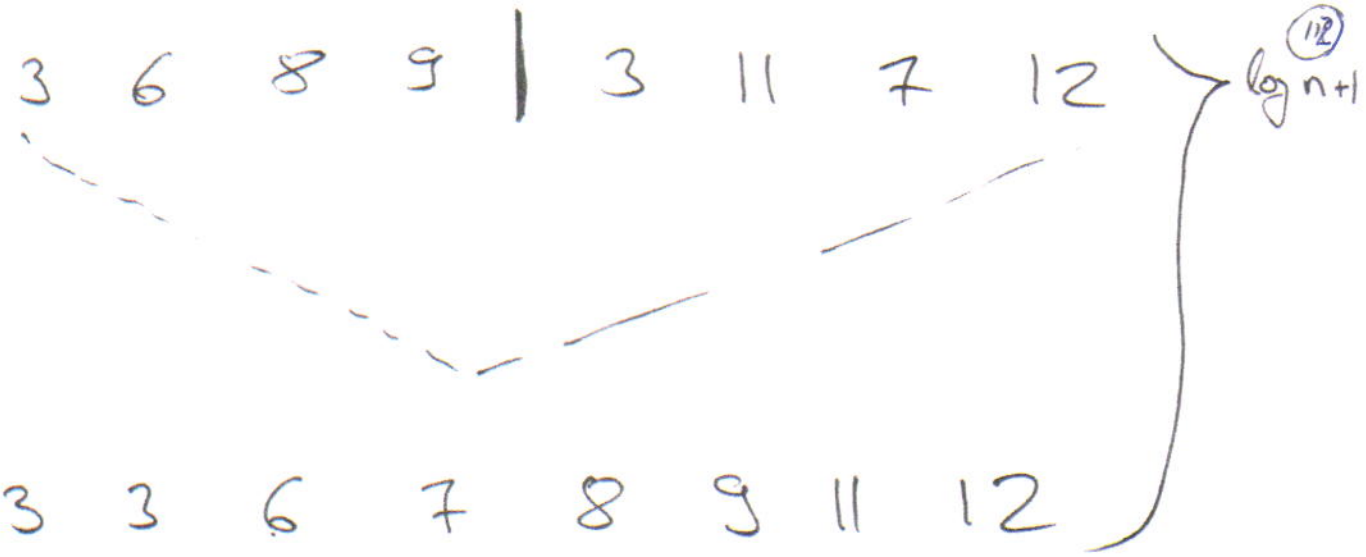
Teile: 8 | 3 | 9 | 6 | 3 | 11 | 7 | 12

Nun kann jedes (dieser 8) Teilproblem in $O(1)$ gelöst werden.

Die Teillösungen müssen nur noch zusammengefügt werden.

z.B. Teill.sg. 1. Pos. 8
" 2. " 3 } → 3 | 8

3 8 | 6 9 | 3 11 | 7 12



Divide-and-Conquer-Algorithmen bestehen aus 3 wesentlichen Schritten:

Divide: Problem in Teilprobleme aufteilen

Conquer: Rekursiv die Teilprobleme lösen, wenn sie „klein genug" (z.B. in $O(1)$ lösbar) sind.

Combine: Teillösungen zur Gesamtlösung vereinigen

Algorithmus 5.2: Mergesort(A, p, r)

Input: Subarray von $A = [1, \dots n]$ der bei p beginnt und bei r endet ($A[p \dots r]$)

Output: Den sortierten Subarray

```
1   IF  p < r  THEN
2       q ← ⌊(p+r)/2⌋        ← Divide
3       Mergesort(A, p, q)
4       Mergesort(A, p+1, r)  } ← Conquer
5       Merge(A, p, q, r)     ← Combine
```

- Sortieren von $A = (A[1], \dots, A[n])$: Mergesort$(A, 1, n)$
- Solange $p < r$ wird geteilt/halbiert.
- Falls $p \geq r$ besteht der Subarray nur noch aus einem Element und ist damit sortiert.

Noch zu klären:

- $\lfloor x \rfloor$ Gauß-Klammer

  $\lfloor x \rfloor = \max \{ k \in \mathbb{Z} : k \leq x \}$

  z.B. $\lfloor 4{,}3 \rfloor = 4$, $\lfloor -2{,}3 \rfloor = -3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$

- Merge(A, p, q, r)

  ↳ Folie

  ↳ ausführlich am Freitag in der 90. Übung