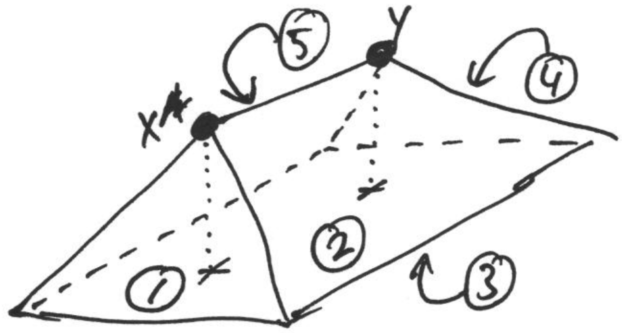
Kapitel 3 – Simplex-Alg.

Was bedeutet das geometrisch? ($\{x \mid Ax \leq b\}$)

zul. BL $\hat{=}$ Ecke von P $\hat{=}$ 0-dim. Seitenfläche

Nichtbasis legt fest, an welchen Ungleichungen wir scharf sitzen



x, y sind zul BL zu B_x, N_x bzw B_y, N_y

Also $N_x = \{1,2,5\}$, $B_x = \{3,4\}$

x, y sind über eine Kante ($\hat{=}$ 1-dim. Seitenfläche) verbunden, dem Schnitt von 2 und 5

$N_y = \{4,2,5\}$, $B_y = \{1,3\}$.

Um von x zu y zu kommen, müssen wir also nur 1 aus ~~den~~ B_x mit 4 aus N_x tauschen

– geht das immer? Algebraisch?

Ang, wir haben B, N, $x_B = A_B^{-1}b$, $x_N = 0$
und wollen ein $q \in N$ „in die Basis tauschen", um
$x_q > 0$ setzen zu können.

Was passiert, wenn wir x_q erhöhen? Wie
müssen wir x_B verändern, um zulässig zu bleiben?
Es soll $Ax' = b$ gelten (mit $x'_q > 0$). Mit $y = A_B^{-1} A_{\bullet q}$
~~konnen~~ erfüllt $x'_B := x_B - \varepsilon y$, $x'_q := \varepsilon$ das:

$$A_B(x_B - \varepsilon y) + A_{\bullet q}\varepsilon = A_B x_B - \varepsilon \underbrace{A_B y} + \varepsilon \underbrace{A_{\bullet q}} = b.$$

Für $\varepsilon = 0$ ist $x' = x$. Für grössere ε steigt x'_q, aber
einzelne x_i $(i \in B)$ könnten fallen. Wie weit können
wir gehen, ohne $x' \geq 0$ zu verletzen?

$$x' \geq 0 \iff x_B - \varepsilon y \geq 0 \iff \varepsilon y \leq x_B$$

$$\iff \text{Für alle } i \in B \text{ gilt } \varepsilon y_i \leq x_i$$

$$\iff \text{Für alle } i \in B \text{ mit } y_i > 0 \text{ gilt } \varepsilon \leq \frac{x_i}{y_i}$$

Das heisst, wir können $\varepsilon = \min\limits_{\substack{i \in B,\\ y_i > 0}} \frac{x_i}{y_i}$ setzen.
(Unbeschr.!)

Für das i, das dieses Min. annimmt, ist dann $x'_i = 0$,
kann also in die Nichtbasis. ~~Das~~ Insg.: $(B \setminus \{i\}) \cup \{q\}$ neue Basis!

Was passiert dabei mit den Kosten?

$$x'_B = x_B - \varepsilon y \quad x'_q = \varepsilon$$

$$\Rightarrow c^T x' = c_B^T x_B - \varepsilon c_B^T y + \varepsilon c_q$$

$$= \underbrace{c_B^T x_B}_{= c^T x} - \varepsilon c_B^T A_B^{-1} A_{\cdot q} + \varepsilon c_q$$

Also verbessert sich $c^T x$ um $\varepsilon (c_q - c_B^T A_B^{-1} A_{\cdot q})$

$$= \varepsilon \left(c^T - c_B^T A_B^{-1} A \right)_q$$

Also für ein $q \in B$: $(c^T - c_B^T A_B^{-1} A)_q = c_q - (c_B^T A_B^{-1} A_B)_q$

$$= c_q - c_q = 0$$

$q \in N$ $\quad (c^T - c_B^T A_B^{-1} A)_q = c_q - (c_B^T A_B^{-1} A_N)_q$

$$\parallel$$

$$\underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}_{=: \bar{c}_N}{}_q$$

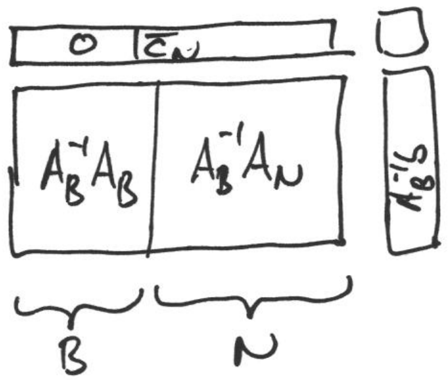
D.h. wenn $\bar{c}_q > 0$, steigt $c^T x$ durch den Basiswechsel. Bei $\bar{c}_q = 0$ bleibt er gleich, bei $\bar{c}_q < 0$ wird er schlechter.

Insgesamt haben wir gerade einen Basiswechsel / „Pivotschritt" beschrieben.

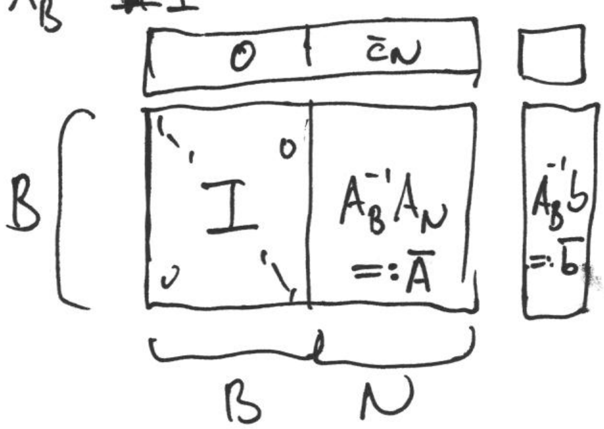
$\bar{c}_N$ heissen „reduzierte Kosten".

~~Das Simplex wollen jetzt das nun verbessern~~

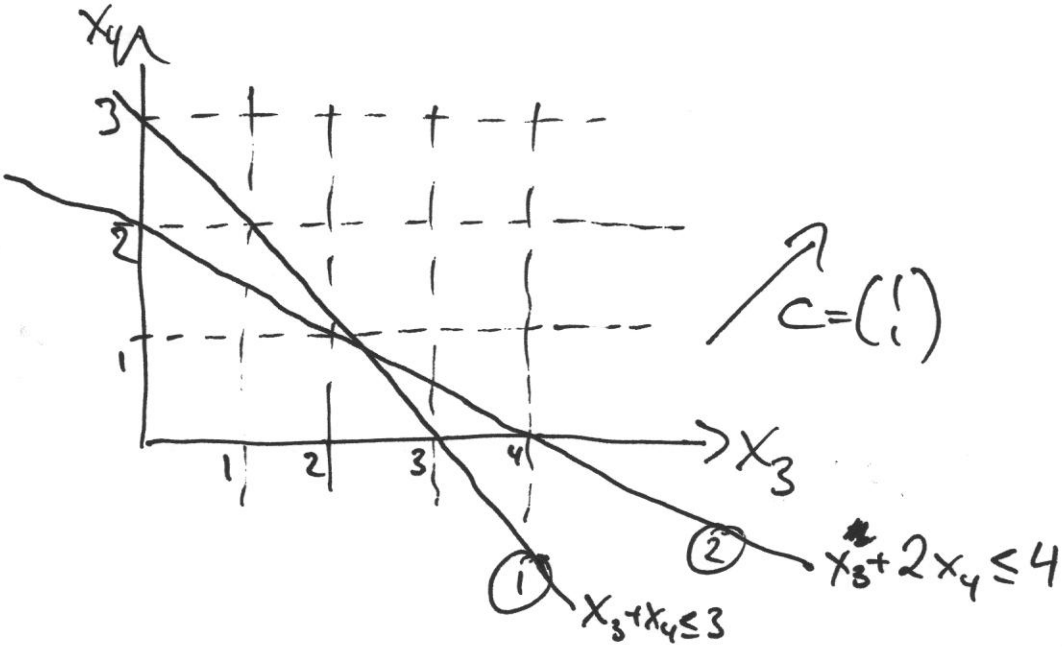
Wie rechnet man mit sowas? → Tableau-Darstellung



Mit $A_B^{-1}A_B = \cancel{1}\, I$



Bsp



In Std. Form mit Schlupf x_1 für ① und x_2 für ②

$$
\begin{cases}
\max & 1x_3 + 1x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\
 & x \geq 0
\end{cases}
$$

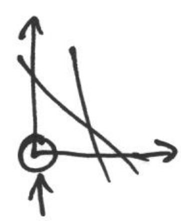
Setze $B=(1,2)$ und $N(3,4)$ (Denn dann ist $A_B = I$ und wir müssen nicht invertieren)

$\bar{c}_N$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
x_2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4
\end{array}
$$

I $\quad \underbrace{\qquad}_{B}$ $\quad \underbrace{\qquad}_{N}$ $\quad A$ $\quad \bar{b}$

$x_1 = 3$
$x_2 = 4$
$x_N = 0$



x_3 oder x_4 in die Basis tauschbar,
~~4~~ beide haben $\bar{c}_i > 0$, also Verbesserung.

Wählen x_4 (also $4 \to B$): $q = 4$

Bestimme $\min\limits_{i \in B} \frac{x_i}{y_i}$, wobei $\bar{b} = x_B$ und $\bar{A}_q = y$!

$$\begin{array}{r|c|c|l}
 & \cdots & \overset{x_4}{\downarrow} & \\
\hline
 & & 1 & 3 \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{3}{1} \\
x_2 \to & \cdots & 2 & 4 \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{4}{2} \leftarrow \text{minimum angenommen}
\end{array}$$

Pivot-Element

D.h. x_2 kommt in die N.Basis, x_4 in die Basis.

Wie das neue Tableau bestimmen?
Wir können die Bestimmung von A_B^{-1} vermeiden, indem wir Gauss-Elimination verwenden

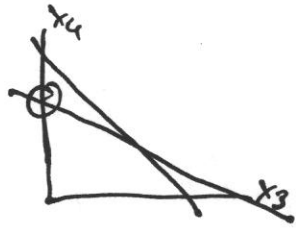
$$\begin{array}{ll|cccc|c|l}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \\
 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mid -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{II} \\
\hline
(\mathrm{I}) & x_1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & \mid -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{II} \\
(\mathrm{II}) & x_2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & \mid \cdot \frac{1}{2}
\end{array}$$

$\underbrace{x_1 \; x_2}_{B}$ $\underbrace{x_3 \; x_4}_{N}$

hier soll neue Basisspalte $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ entstehen

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-2
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
x_4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
	B	N	N	B	

$x_1 = 1$
$x_4 = 2$ $\quad c^T x = 2$
$x_N = 0$



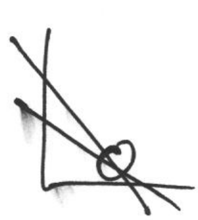
Wir können x_2 oder x_3 in B holen.

Red. Kosten: x_2: $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Rückschritt
x_3: $+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Fortschritt

		x_1	x_2	x_3	x_4			
		0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-2		$1-\mathrm{I}$
(I)	x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$(\varepsilon \leq 2)$	$1 \cdot 2$
(II)	x_4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$(\varepsilon \leq 4)$	$1-\mathrm{I}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	-1	0	0	0	-3
x_3	2	-1	1	0	2
x_4	-1	1	0	1	1
	N	N	B	B	

$x_3 = 2$
$x_4 = 1$ $\quad c^T x = 3$
$x_N = 0$



Jetzt ist $\bar{c}_N \leq 0$, weitermachen lohnt
also nicht.
(Wir sind optimal, müssen das aber noch beweisen)