Beweis (ii): „$\Leftarrow$" trivial

„$\Rightarrow$" Analog zu (i). Betrachte x, D wie zuvor.

(a) wie zuvor (damit x optimal!)

(b) –"–

(c) $\mathrm{rang}(A_D) < |D|$: Wähle z (wie zuvor)

Also gilt für kleine $\varepsilon > 0$:

- $x \pm \varepsilon z$ ist zulässig
- $(x \pm \varepsilon z)_D \geq 0$
- $Az = 0$

Also gilt:

- $x = \frac{1}{2} \cdot (x + \varepsilon z) + (1 - \frac{1}{2})(x - \varepsilon z)$
- $c^T(x + \varepsilon z) = c^T x + \varepsilon c^T z$

  $c^T(x - \varepsilon z) = c^T x - \varepsilon c^T z$

  Also muss $c^T z = 0$ (sonst wäre x nicht opt.)

Damit kann x um εz verschoben werden, und wieder D verkleinert werden.

Damit können wir schon einen (nicht sonderlich cleveren) Algorithmus zum Lösen von LPs formulieren. (Ausser unbeschränkte, das können wir noch nicht erkennen!)

- Betrachte alle $\binom{n}{m}$ möglichen Basen B.
  Für jede:
  - bestimme A_B^{-1} (falls nicht invertierbar: ist keine Basis)
  - ~~überprüfe~~ $\cancel{A_B^{-1}}$
    $x_B := A_B^{-1} b \quad x_N = 0$
  - überprüfe $x \geq 0$ (sonst ist x nicht zulässig)
- Wähle dabei die zul. Basis, die $c^T x$ maximiert.

Was ist jetzt mit den „Ecken"?

<u>Beob 2.5</u> Die Lösungsmenge P eines LPs ist konvex, d.h.

$$x \in P,\ y \in P \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in P \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Beweis:
- $\{x \mid x_i \geq 0\}$ ist konvex
- $\{x \mid a^T x \leq \alpha\}$ ist konvex
- Schnitte von konvexen Mengen sind konvex #

<u>Def 2.6</u> Ein $x \in P$ heisst EXTREMPUNKT der konvexen Menge P, wenn es kein $y, z \in P$, $0 < \lambda < 1$ gibt mit $x = \lambda y + (1-\lambda) z$.

BILD

Satz 2.7 $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$, A voller Rang.

Es gilt: $x \in \mathbb{R}^n$ ist Extrempunkt von P

$\iff$ x ist zulässige Basislsg.

Beweis

„$\Rightarrow$" x Extrempkt

Setze $D = \{i \mid x_i > 0\}$, $Z = \{i \mid x_i = 0\}$

$\Rightarrow A_D x_D = b,\ x_Z = 0.$

Ang., die Spalten von A_D seien linear abhängig, dann ex Linearkoeffizienten $(y_i)_{i \in D}$ mit $\sum_{i \in D} y_i A_{\bullet i} = 0$. $\circledast$

Erweitere y auf alle Indizes: $y_i = 0$ für $i \in Z$, dann ist $A_D y_D = 0$, $y_Z = 0$.

Also erfüllt y für alle ε: $A(x + \varepsilon y)$

$$= Ax + \varepsilon Ay = \underbrace{A_D x_D}_{b} + \varepsilon \underbrace{A_D y_D}_{0} + A_Z \underbrace{x_Z}_{0} + \varepsilon A_Z \underbrace{y_Z}_{0}$$

$$= b.$$

Da $x_D > 0$, finden wir ein kleines $\varepsilon > 0$ mit $x_D + \varepsilon y_D \geq 0$ und $x_D - \varepsilon y_D \geq 0$.

Also ist $x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y)$, also kein Extrempunkt von P! $\lightning$ zu $\circledast$

Also sind die Spalten von A_D lin. unabh. Damit lässt sich D zu einer Basis B erweitern, mit $A_B x_B = b$ und $x_N = 0$.

„$\Leftarrow$" Sei x zul. Basislsg zur Basis B (& NichtB. N).

$\Rightarrow x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$.

Sei $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ für $x, z \in P$.

Ang., $0 < \lambda < 1$.

Dann muss $y_N = z_N = 0$ (wenn >0-Koeff., kann der durch das $\lambda > 0$ nicht zu 0 werden)

Also $A_B y_B = b$, $A_B z_B = b$

$\Rightarrow y_B = A_B^{-1} b$, $z_B = A_B^{-1} b$

$\Rightarrow y_B = z_B = x_B$

$\Rightarrow x = y = z$.

Also kann x nicht ~~kann~~ Konvexkomb von verschiedenen Punkten in P sein.

#