(1) Formeln (Lineare Algebra) 2.2.2011

- Eine Matrix B heisst Streichungsmatrix von A, wenn sie aus A durch Löschen ~~und~~ von Zeilen und Spalten entsteht.
- A^*_{ij} = Die Streichungsmatrix, die durch Löschen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A entsteht

$$A = \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \leftarrow i \qquad A^*_{ij} = \begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \\ \hline \end{array}$$

$$\uparrow j$$

- $(A^{(-1)})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \cancel{\det(A^*_{ij})} \det(A^*_{ji})$ (Formel 4.9)

- La Place'scher Entwicklungssatz (Formel 4.10)

$$\det A = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A^*_{ij}}_{\text{entwicklung nach der iten Spalte}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A^*_{ij}}_{\text{entwicklung nach j-ten Zeile}}$$

Def. 4.11:

Eine Matrix A ~~A~~ heisst TOTAL UNIMODULAR, wenn jede Streichungsmatrix von A die Determinante −1, 0 oder +1 hat.

Sei A TUM (Total unimodular) und quadratisch,

Dann ist $(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A} \det A^*_{ji} \in \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$

Sei A gegeben, TUM, $b \in \mathbb{Z}^m$, Sei A_B quadratische, invertierbare Spaltenstreichungsmatrix

Dann ist $A_B^{-1} b \in \mathbb{Z}^m$

Satz 4.12 Sei A TUM, $b \in \mathbb{Z}^m$, B Basis, N Nichtbasis.
Dann ist die zugehörige Basislösung ganzzahlig.
($\max c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$)

Gilt auch für $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$
↳ Mit Schlüpfen $(A \cdot I) \binom{x}{s} = b$, $x, s \geq 0$

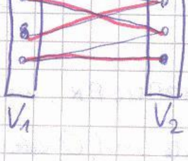
$\boxed{\text{Behauptung:}}$ $(A I)$ ist TUM, wenn A TUM.

Streichungsmatrix: $(A^* I^*) = \left[A^* \;\vdots\; \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right]$

Wenn Teile von I erhalten: Entwicklung nach genau dieser Spalte.
Sonst: Teilmatrix von A^*
In beiden Fällen ist $\det \in \{-1, 0, 1\}$.

Beispiel 4.13: Min-weight perfect bipartite Matching

Bipartiter Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$



Perfektes Matching
Kantenkosten $(c_e)_{e \in E}$
Gesucht: perfektes Matching
mit Gewicht $c(M) = \sum_{e \in M} c_e$ minimal

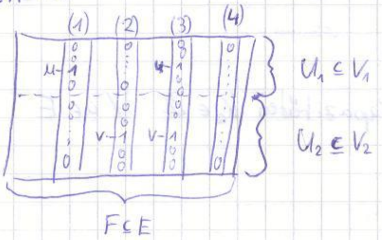
MuA 2.2.2011

Als IP: $\begin{cases} \min \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.t.} \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V_1 \cup V_2 \\ x_e \in \{0,1\} \end{cases}$

Behauptung: Matrix dieser IP's ist TUM

Beweis: Gegeben Streichungsmatrix A davon.

Angenommen die Beh. ist bereits gezeigt für alle Streichungsm. von A.

$A =$ 

Betrachte $e = uv \in F$ ($u \in V_1, v \in V_2$)

(1) $u \in U_1$, $v \notin U_2$

(2) $u \notin U_1$, $v \in U_2$

(3) $u \in U_1$, $v \in U_2$

(4) $u \notin U_1$, $v \notin U_2$

(i) Angenommen, es gäbe eine Spalte vom Typ (4)

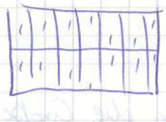
$\Rightarrow$ Entwickle nach dieser Spalte $\Rightarrow \det A = \sum 0 \cdot (*) = \underline{\underline{0}}$ ✓

(ii) Ang., es gäbe eine Spalte vom Typ (1) oder (2)

$\Rightarrow$ Entwickle nach dieser Spalte, hat genau einen Nicht-null-Eintrag und der ist 1

$\Rightarrow \det A = (-1)^{?} \cdot 1 \cdot \underbrace{\det A^*_{?}}_{-1,0,1 \text{ nach Ind. Vor.}} \in \{-1, 0, 1\}$

(iii) Ang. die Spalten sind vom Typ (3)

$A =$ 

Wir können eine 0 linearkomb.: $u^T A$ $u_i = -1$ ($i \in U_2$), $u_i = 1$ ($i \in U_1$) $\Rightarrow u^T A = 0^T \Rightarrow$ Die Zeilen von A sind linear abhängig.

$\Rightarrow A$ ist singulär $\Rightarrow \det A = 0 \in \{-1, 0, 1\}$

$\square$

BSP 4.14 Maximum Matching $\qquad G=(V,E)$

$$
IP \begin{cases} \max \sum_{e\in E} x_e \\ \text{s.t. } \sum_{e\in\delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v\in V \\ x_e \in \{0,1\} \end{cases}
$$

Wenn G bipartit ist, dann gilt $(A\,I)$ ist TUM $\Rightarrow$ IP = LP-Relaxierung

$\Rightarrow$ Satz von König: In bip. Graphen ist max Matching = min VC

BSP 4.15 Netzwerkflüsse

Gegeben: $\underset{\text{Digraph}}{G}$, $s,t\in V$, Kapazitäten $k_a \in \mathbb{Z}$ $\forall a\in E$

$$
\begin{cases} \max \sum_{a\in\delta^+(s)} x_a - \sum_{a\in\delta^-(s)} x_a \\ \text{s.t. } \sum_{a\in\delta^+(v)} x_a - \sum_{a\in\delta^-(v)} x_a = 0 \quad \forall v \in V/\{s,t\} & \text{// Flusserhaltung } U \\ x_a \leq k_a \quad \forall a\in E & \text{// Kapazitäten } K \\ x_a \geq 0 \end{cases}
$$

$x_a \in \mathbb{Z}$ // Nur ganzzahlige Flüsse

Zugehörige Streichungsmatrix

Beh.: A ist TUM, Beweis wieder per Ind. über die Größe von A.

(i) Ang. ein $a\in K$ ex.

$\Rightarrow$ zugehörige Zeile ist $\boxed{0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0}$

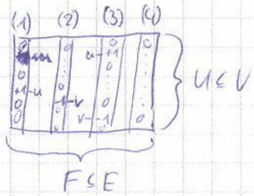
oder $\boxed{0 \cdots \cdots 0}$

LaPlace-Entwicklung liefert entweder $\det A = (-1)^? \cdot 1 \cdot A_?^* \in \{0,-1,1\}$

oder $\det A = 0 \qquad \in \{-1,0,1\}$

MMA 2.2.2011

(ii) Ang. $K = \emptyset \Rightarrow A =$



Betrachte einen Bogen $a = uv$

Fälle: (1) $u \in U,\ v \notin U$

(2) $u \notin U,\ v \in U$

(3) $u \in U,\ v \in U$

(4) $u \notin U,\ v \notin U$

(ii.1) Ang. es gibt eine Spalte von Typ 4 $\Rightarrow \det A = 0$

(ii.2) Ang. es gibt eine Spalte von Typ (1) o. (2) $\Rightarrow \det A = (\pm 1) \cdot (-1)^{?} \det A^{*}_{?} \in \{-1, 0, 1\}$

(ii.3) Ang. es gibt eine Spalte vom Typ (3) $\Rightarrow \mathbb{1}^T A = 0^T \Rightarrow \det A = 0$