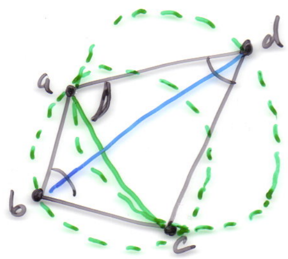
Übungsblatt 5

① a) Zeige: kleinste Innen-∢ einer DT ist ≥ kleinsten Innenwinkel jeder anderen Triangulation eines 4-Ecks.

2 Fälle: 1. 4-Eck konkav ⇒ Gibt nur 1 Triang!

2. konvex ⇒ Es gibt genau 2 Triangs!



(i) Kleinster Winkel von DT(P) ist an b oder d
⇒ Andere Triang halbiert diesen Winkel
d.h. kleinster Winkel der Nicht-DT ist kleiner!

(ii) oBdA ist der kleinste Winkel $\measuredangle cad$.
Betrachte Kreis durch c, a und d:
$\measuredangle cad > \measuredangle dbc$
Nicht-DT enthält Winkel, der kleiner ist, als der kleinste in der DT!

b) $|P| > 4$?

Ideen

– Betrachte immer 2 benachbarte Δe

Lösung

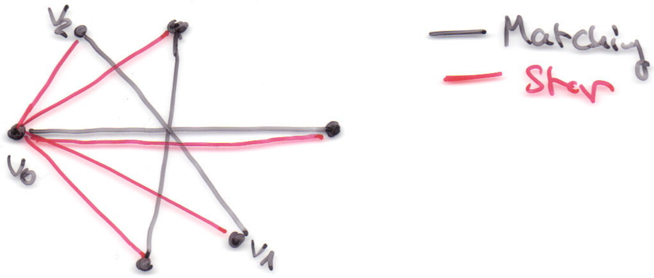
Ann: ∃ eine Nicht-DT T mit größtmöglichem kleinsten Winkel δ.
⇒ Da die DT den kleinsten Winkel maximiert, können wir jedes 4-Eck zu seiner DT-Variante „flippen" ohne δ zu verringern, bis P komplett Delaunay-trianguliert ist!

2) a) Zeige: min Star $\geq$ max Mat

Ideen

- Δs-Ungleichung

Lösung



- Zu jeder Matching-Kante $v_i v_j$ gibt es einen „Umweg" über v_0: $v_i v_0$, $v_0 v_j$ (Abgesehen von genau einer Kante die in Matching und Star vorkommt)
- Nach Δs-Ungl: Weg über v_0 immer $\geq$ direkter Weg

$\Rightarrow$ min Star $\geq$ max Mat

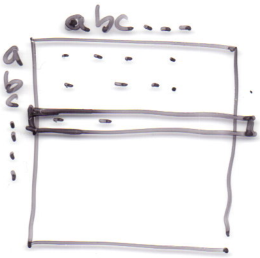
b) Zeige: $\frac{\text{min Star}}{\text{max Mat}} \leq 2$

Ideen

- Gegen S abschätzen. min Star $\leq \frac{S}{N}$, max Mat $\geq \frac{1}{2N} S$
- Alle anderen Stars $\geq$ min Star
- Summe der Sterne muss S sein, Schubfachprinzip
- Dto für Matching!

Lösung

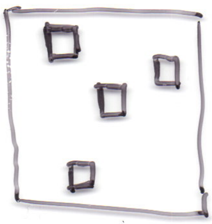
Sterne:



min Star: Zeile mit der kleinsten Summe die muss kleiner als die durchschnittliche Zeilensumme sein!

$\Rightarrow$ min Star $\leq \frac{S}{N}$

Matchings:



max Mat: max. Auswahl an $\overset{N/2}{\vee}$ Zellen die keine Zeilen und Spalten gemeinsam haben.
Muss $\geq$ N/2 · durchschnittlicher Zellenwert sein!

$\Rightarrow$ max Mat $\geq \frac{N}{2} \cdot \frac{S}{N^2} = \frac{S}{2N}$

$\Rightarrow \frac{\text{min Star}}{\text{max Mat}} \leq 2$

c) Zeige: $\frac{\text{minStar}}{\text{maxMat}}$ kann bel. nahe an 2 liegen

Ideen

– Alle Abstände 1!

Lösung

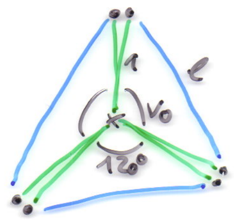
Vollständiger Graph mit N Knoten und allen Kantengewichten auf 1.

$\text{maxMat} = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$

$\text{minStar} = N-1$

$\frac{\text{minStar}}{\text{maxMat}} = \frac{N-1}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$ bel. Nahe an 2 für hohe N!

d) $\frac{\text{minStar}}{\text{maxMat}} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$?



minStar

maxMat

Kosinussatz:

$e^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow e = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \text{minStar} = 6$

$\text{maxMat} = 3\sqrt{3}$

$\frac{\text{minStar}}{\text{maxMat}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

3) a) $Q(n) = 2Q(\frac{n}{4}) + 2$

$= Q(\frac{1}{4}n) + Q(\frac{1}{4}n) + 2$

$\alpha_1 = \frac{1}{4} \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} \quad 2 \in \Theta(n^0) \Rightarrow d = 0$

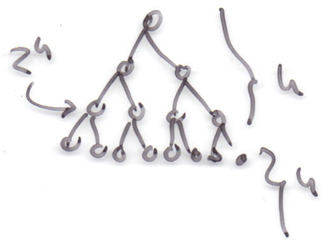
$\Rightarrow (\alpha_1)^d + (\alpha_2)^d = 2 \Rightarrow$ 3. Fall

$(\frac{1}{4})^c + (\frac{1}{4})^c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow Q(n) \in \Theta(\sqrt{n})$

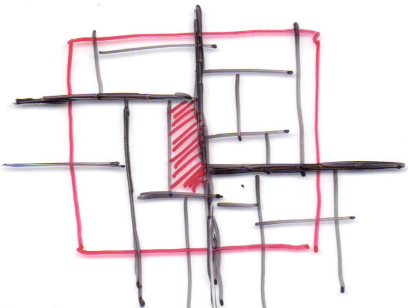
b) h-Dimensionaler Fall

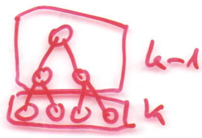
$Q(n) = 2^h/2 \cdot Q(\frac{n}{2^h}) + \frac{2^h}{2}$



Nach h Entscheidungen
2^h Möglichkeiten

Wir betrachten nur die Ränder des h-Dimensionalen Anfragequaders. So ein Rand hat h-1 Dimensionen und schneidet höchstens die Hälfte aller Regionen im h-hohen Baum





Teil-Baum in O(k) abarbeitbar!

c) $Q(n) = 2^{h-1} Q(\frac{1}{2^h} n) + \underbrace{2^{h-1}}_{f(n)}$

$f(n) \in \Theta(n^0) \Rightarrow d = 0$

$\sum_i (\alpha_i)^d = 2^{h-1} > 1 \qquad (h \geq 3)$

$\Rightarrow$ 3. Fall

$2^{h-1} \left(\frac{1}{2^h}\right)^c = 1 \Leftrightarrow 2^{h-1} = 2^{hc} \Leftrightarrow h-1 = hc$

$\Leftrightarrow c = \frac{h-1}{h} = 1 - \frac{1}{h}$

$\Rightarrow Q(n) \in \Theta(n^{1-\frac{1}{h}})$

Rechtecksanfrage in $O(n^{1-\frac{1}{h}} + k)$

Anzahl der ausgegebenen Punkte