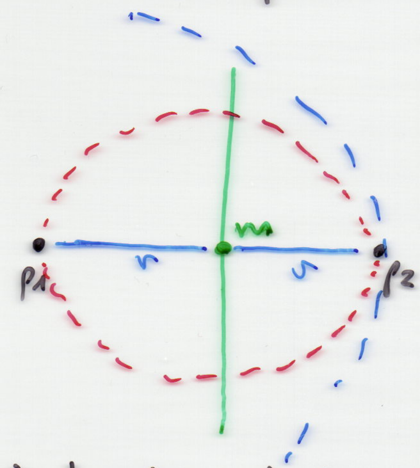
Übungsblatt 3

1) Z: p_2 nächste Site zu p_1 $\Rightarrow$ $V(p_1)$ und $V(p_2)$ benachbart

Lösung:



- Die Voronoi-Kante zwischen $V(p_1)$ und $V(p_2)$ muss ein Teil der Mittelsenkrechten sein!
- p_2 ist die nächste Site zu p_1 $\Rightarrow$ Im $2r$-Kreis um p_1 gibt es keine anderen Sites!
- MS kann nur von Sites beeinflusst werden, die Abstand $\leq r$ zu ihr haben!
- Im Punkt m sind das nur p_1 und p_2!

$\Rightarrow$ Voronoikante zwischen $V(p_1)$ und $V(p_2)$ enthält m, ist also nicht leer

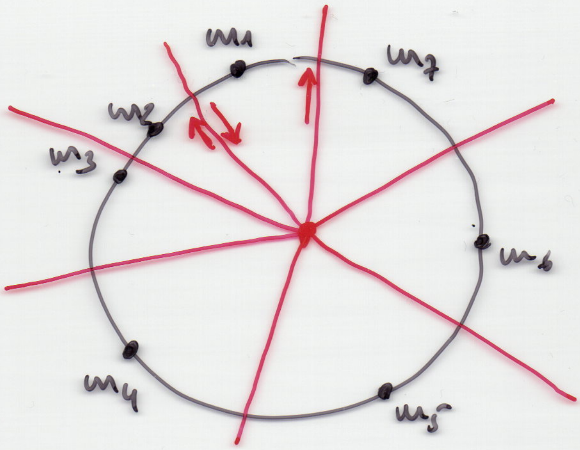
$\Rightarrow$ $V(p_1)$ und $V(p_2)$ sind benachbart!

2) Zeige: Mit Voronoi-Diagramm kann man sortieren!

Lösung

Geg: Menge $M \subset \mathbb{R}$ von Zahlen und Algorithmus, der $Vor(P)$ in $O(f(|P|))$ berechnen kann

- Bestimme $\min M$ und $\max M$ (in $O(n = |M|)$)
- $M' := \{ m \cdot \frac{360°}{\max M} \mid m \in M \}$ (in $O(n)$)
- $P := \{ (-\sin\alpha, \cos\alpha) \mid \alpha \in M' \}$ (in $O(n)$)



- Berechne Vor(P) (in $O(f(n))$)
- Finde Halbkante e in Vor(P) so dass e.face.site.α = min M (in $O(n)$)
- L:= leere Liste
- while (|L| < |M|) { (in $O(n)$)

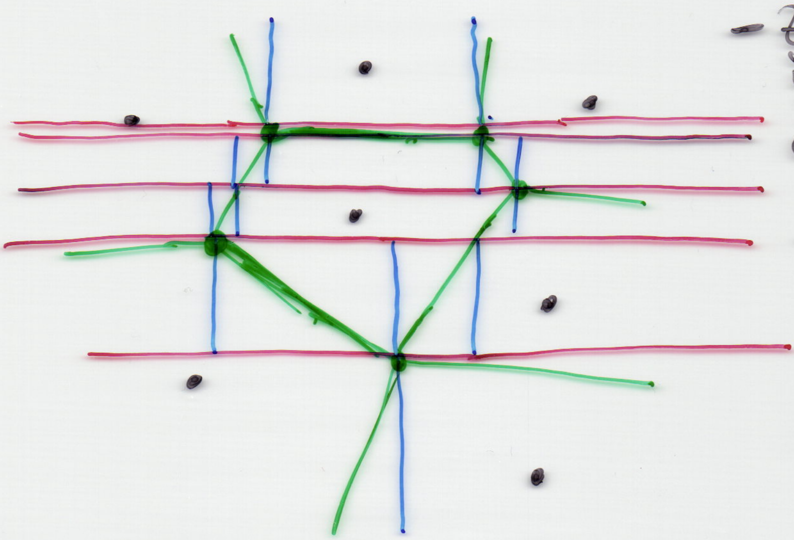
    L.append(e.face.site.$\alpha \cdot \frac{\max M}{360°}$)
    e := e.prev (wenn e.prev definiert)
    e := e.twin

  }

$\Rightarrow$ L ist Sortierung von M die in $O(f(n)+n)$ erzeugt wurde

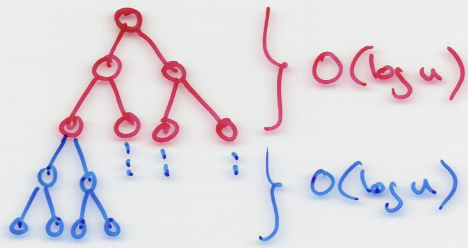
3) <u>Voronoi-Lookup</u>

Geg: Punktmenge P und Vor(P)
Erstelle DS die zu einem beliebigen Punkt in $O(\log |P|)$ die nächste site findet.



- Zerteile das Diagramm in horizontale Streifen an den V-knoten ($O(n)$ Stück)
- Dann zerteile H-Streifen in V-Streifen an den Kante-Streifen Schnitt-Punkten ($O(n)$ pro H-Streifen)

- Erstelle bin. Suchbaum für H-Streifen
  (ausbalanciert)
  Höhe $O(\log n)$
- Für jeden H-Streifen erstelle bin.
  Suchbaum für die V-Streifen
  (ausbalanciert)
  Höhe je $O(\log n)$
- Hänge V-Bäume an die Blätter
  vom H-Baum

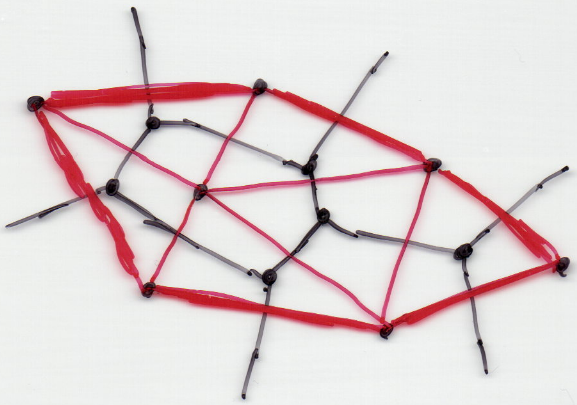


⇒ Suchbaum der Höhe $O(\log n)$

Lookup: Im Baum suchen ($O(\log n)$ Entscheidungen)
Dann noch max. 1x Geradengleichung für die
V-Zelle ($O(1)$).

Delaunay-Triangulation

Wie sieht der Dualgraph eines Voronoi-Diagramms aus?

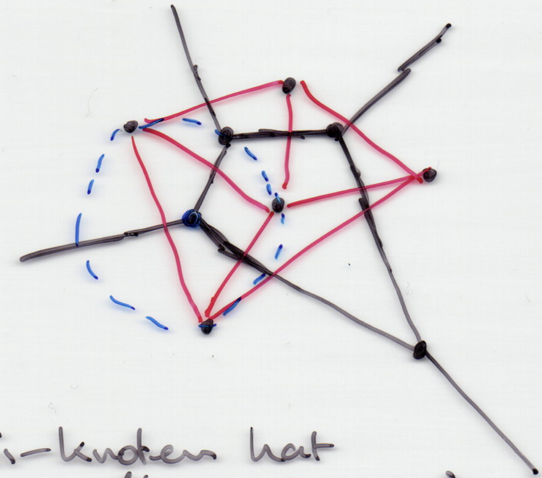


Fläche → Knoten
Knoten → Fläche
Nachbarschaft ↔ Kante

- Stellt Nachbarschaftsbeziehungen der Sites dar
- Beinhaltet die konvexe Hülle der Site-Punktmenge

Wenn VD in allgemeiner Lage
⇒ DT ist eine Triangulation der Punktmenge!

Wie sehen Δe in so einer Triangulierung aus?

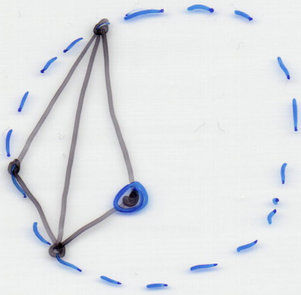


- Voronoi-Knoten hat gleichen Abstand zu seinen 3 nächsten Sites

$\Rightarrow$ Im Kreis durch diese Sites ist keine andere Site

$\Rightarrow$ In der DT enthalten die Umkreise der Δe keine anderen Knoten

DT



keine DT

$\Rightarrow$ DT enthält wenig kleine Winkel!

- Nützlich z.B. in der Computergrafik, wo diese zu numerischen Problemen führen können.