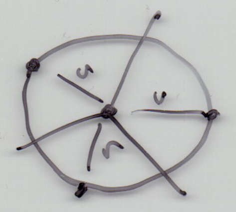
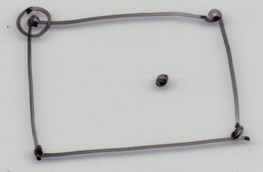
Übungsblatt 3

1) a) Ideen

- Die Voronoi-knoten sind Kandidaten
- + Ecken der Umrandung

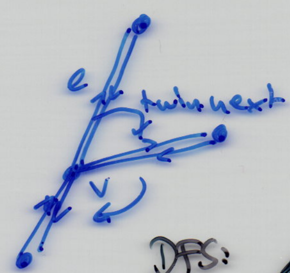




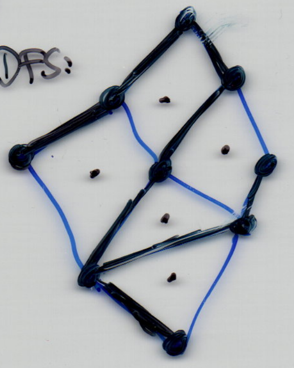
Lösung:

- Lasse Castiel die DCEL erstellen
- Tiefensuche nach dem Knoten mit größtem Abstand zu den Lagern

```
m:=0  V:=∅
function dfs(v) {
    if( |v.edge.face.site - v| > m ) {
        m:= |v.edge.face.site - v|
        vmax:= v
    }
    V:= V ∪ {v}          // besuchte Knoten
    e0:= v.edge
    e:= e0
    do {
      if (e.destination ∉ V) {
         dfs(e.destination)
      }
      e:= e.twin.next
    } while (e ≠ e0)
}
dfs(v0)
print vmax
```



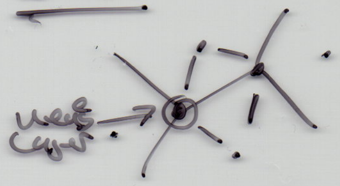
DFS:



Korrekt: • V-Knoten sind am weitesten von umliegenden Lagern entfernt
• DFS besucht alle Knoten

Laufzeit: • DFS besucht jeden Knoten $O(1)$
• Es gibt $O(n)$ Voronoi-knoten
$\Rightarrow$ DFS in $O(n) \subset O(n \log n)$
$\Rightarrow$ Vog. Voronoi: Alg in $O(n \log n)$

1) b) **Ideen**



Problem: Lager auf V-Knoten verkleinert Voronoi-Zellen, Lager zwischen V-Knoten könnte aber mehrere gleichzeitig verkleinern und daher besser sein!

Lösung

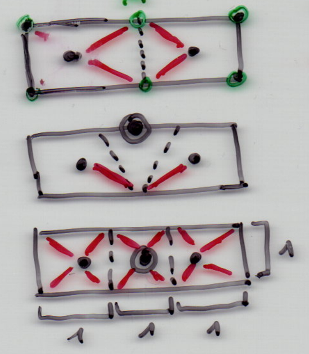
Nein!

Gegenbeispiel:

Vor neuem Lager:

Nach Algorithmus:

Optimal:



∘ Kandidaten

∘ max. Entfernung

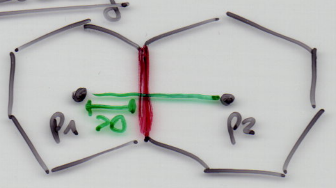
2) a) Kann eine V-Zelle aus einem einzigen Punkt bestehen?

Ideen

Nur ein Punkt → ganzes Gebiet

sonst: Nächster-Nachbar-Entfernung

Lösung



Betrachte nächstgelegene Site $p_2 \neq p_1$.
Da p_2 die nächste Site ist, gibt es eine Voronoi-Kante von $V(p_1)$ zwischen p_1 und p_2, die $\overline{p_1 p_2}$ halbiert.

Betrachte die Hälfte in $V(p_1)$.

Da $|\overline{p_1 p_2}| > 0 \Rightarrow \frac{|\overline{p_1 p_2}|}{2} > 0$

$\Rightarrow$ $V(p_1)$ enthält (überabzählbar) unendlich viele Punkte!

b) Kann eine Voronoi-Kante durch eine Site laufen?

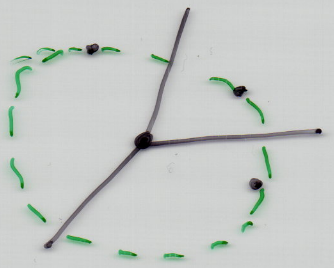
Ideen

- Kante gleichweit entfernt von 2 nächsten Sites
  → Dann müsste es 2 Punkte mit Entfernung 0 zur Kante geben!

Lösung

Sei p_1 diese Site.
Voronoi-Kante = Punkte, die gleich weit von den nächsten Sites entfernt sind.
Aber: p_1 ist immer echt näher an sich selbst als an einer anderen Site ⇒
$p_1 \notin Vor(\{p_1, ...\})$
→ Aussage gilt nicht!

c) Zeige: Voronoi-Knoten in $Vor(\{p_1, p_2, p_3\})$ ist eindeutig bestimmt, wenn p_1, p_2, p_3 nicht auf einer Linie!



Ideen
- Kanten müssen sich schneiden!
- 3 Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt (△)

Lösung

Voronoi-Knoten = Punkt von dem 3 Sites gleich weit entfernt sind
⇔ Mittelpunkt des Kreises durch die Sites

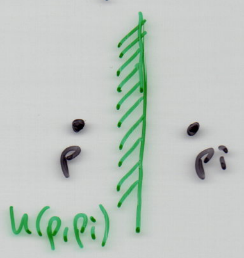
Und der ist eindeutig, wenn die Sites nicht auf einer Geraden liegen!

d) Zeige:
Entfernen eines Knotens ändert das VD nur in seiner Zelle.

Ideen
- Punkte in der V-Zelle sind am nächsten an ihrer Site
- Das ändert sich auch nicht, wenn eine andere wegfällt

Lösung

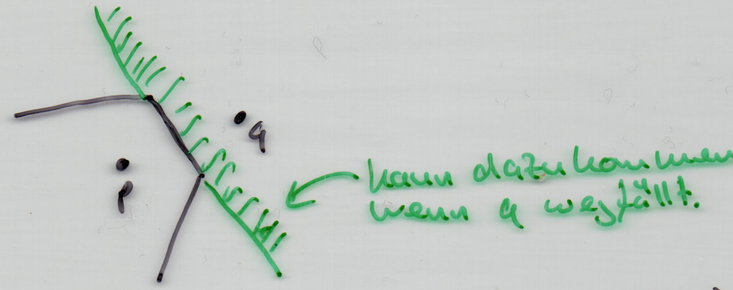
$$V_P(p) = \bigcap_{\substack{p_i \in P \\ p_i \neq p}} h(p, p_i)$$



Im „neuen" VD:

$$V_{P \setminus \{q\}}(p) = \bigcap_{\substack{p_i \in P \\ p_i \neq p \\ p_i \neq q}} h(p, p_i)$$

$\forall p \in P\setminus\{q\}: V_{P\setminus\{q\}}(p) \subseteq V_P(p) \cup h(p,q)$



$\Rightarrow$ keine Voronoi-Zelle (ausser der von q) wird verkleinert!

- V-Zellen überlappen nicht
- Platz wird nur frei in $V_P(q)$

$\Rightarrow$ Diagramm kann sich nur im Bereich $V_P(q)$ ändern!