Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 10/11**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Henning Hasemann

Algorithmische Geometrie
Übung 5 vom 27. 01. 2011

Abgabe der Lösungen am Freitag, den 11. 02. 11, vor der Übung
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen versehen!

Aufgabe 1 (Delaunay-Triangulation): Gegeben eine endliche Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$.

a) Zeige: Der kleinste Dreiecksinnenwinkel in der Delaunay-Triangulation $DT(P)$ ist größer oder gleich dem kleinsten Dreiecksinnenwinkel jeder anderen Triangulation von P wenn $|P| = 4$.

(Hinweis: Benutze den Periphärwinkelsatz!)

b) Zeige: Die Aussage gilt auch für $|P| > 4$.

(Hinweis: Benutze hierfür das Ergebnis aus a)!)

(20+20 P.)

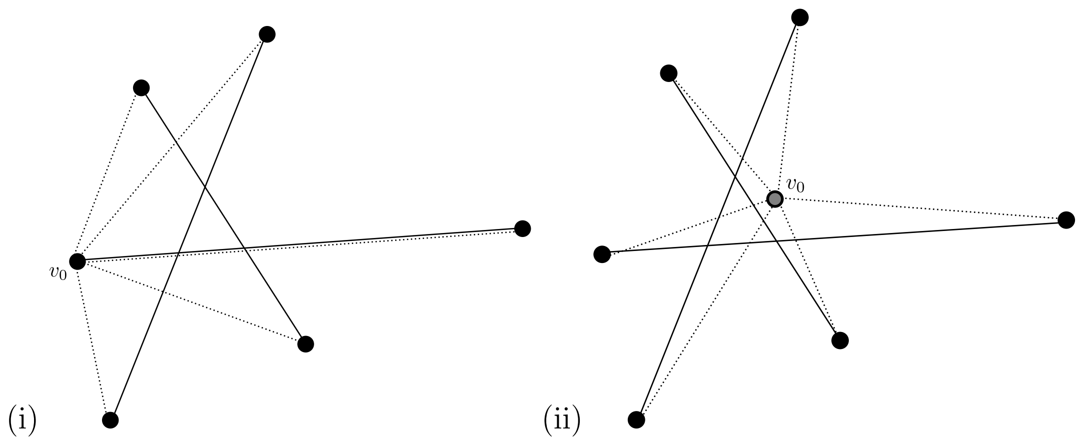

Abbildung 1: (i) MinStar (gepunktet) und MaxMatching (durchgezogene Kanten) bei Aufgabe 2 a),b) und c). (ii) MinStar und MaxMatching bei Aufgabe 2 d).

Aufgabe 2 (MinStar / MaxMatching): Gegeben: Ein vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit $|V|$ gerade und Kantengewichten $\ell(e)$, die der Dreiecksungleichung genügen, d.h. $\ell(\{v_1, v_3\}) \leq \ell(\{v_1, v_2\}) + \ell(\{v_2, v_3\}) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$.

Sei

$$minStar := \min_{v_0} \sum_{e \in \delta(v_0)} \ell(e)$$

das Gewicht des Sterns mit dem geringsten Kantengewicht, der durch Auswahl von v_0 in G gebildet werden kann. ($\delta(v_0)$ bezeichnet dabei die Menge aller Kanten an v_0.)
Sei

$$maxMat := \max_{E_m} \sum_{e \in E_m} \ell(e) \quad \text{über alle Matchings } E_m \text{ auf } G$$

das Gewicht eines gewichtsmaximalen perfekten Matchings. (Jeder Knoten aus G wird also genau einem anderen zugeordnet, so dass die Summe der Kantengewichte dieser Zuordnungen maximal ist.).

a) Zeige: $minStar \geq maxMat$.

b) Zeige: $\frac{minStar}{maxMat} \leq 2$. (Hinweis: Sei S die Summe aller Gewichte in der Adjazenzmatrix. Verwende das Schubfachprinzip, um $minStar$ und $maxMat$ gegen S abzuschätzen.)

c) Zeige: $\frac{minStar}{maxMat}$ kann beliebig nah an 2 liegen.

d) Betrachte nun die euklidische Ebene ($V \subset \mathbb{R}^2$, Kantengewichte durch das " übliche" euklidische Distanzmaß) und lasse beliebige Stern-Zentren in der Ebene zu.
Zeige: Es gibt eine Auswahl von Knoten V, so dass $\frac{minStar}{maxMat} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ gilt.

(10+10+10+10 P.)

Einschub: Master-Theorem

Das Wachstum einer rekursiv definierte Funktion $T(n)$ kann wie folgt abgeschätzt werden:
Sei

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i n) + f(n)$$

mit $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $c, \alpha_i \in \mathbb{R}$ und $f(n) \in \Theta(n^d)$.
Dann gilt:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^d) < 1 \\ \Theta(n^d \log n) & \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^d) = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^c) = 1 & \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^d) > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (kd-Bäume):

a) Die Anzahl geschnittener Regionen bei einer Rechtecks-Anfrage in einem zweidimensionalen kd-Baum mit n Knoten ist beschränkt durch $Q(n) = 2Q(\frac{n}{4}) + 2$. Zeige: Die Laufzeit für eine Rechtecksanfrage in einem zweidimensionalen kd-Baum liegt in $O(\sqrt{n} + k)$ wobei k die Anzahl der zurückgelieferten Knoten ist.

b) Wie lautet die Rekursionsformel für die Anzahl geschnittener Regionen im h-dimensionalen Fall ($h \geq 3$)? Erläutere die Konstruktion der Formel!

c) Gib die Laufzeit einer Rechteckansfrage im h-dimensionalen Fall auf Basis der in b) entwickelten Rekursionsformel an (Master-Theorem).

(10+20+10 P.)