Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 10/11**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Henning Hasemann

Algorithmische Geometrie
Übung 3 vom 17. 12. 2010

Abgabe der Lösungen am Dienstag, den 10. 01. 11, vor der Übung im SN19.4.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen versehen!

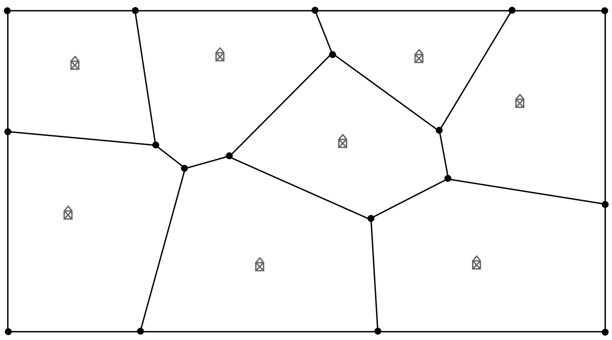

Abbildung 1: Skizze eines Voronoi-Diagramms von Castiel

Aufgabe 1 (Weihnachtsaufgabe): Um die Geschenke effizient verteilen zu können, hat der Weihnachtsmann (S_C) überall auf der Welt versteckte Zwischenlager mit Positionen $L_1, \ldots, L_n \in \mathbb{R}^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ eingerichtet.
Von den Studiengebühren ist noch genügend Geld übrig, um ein neues Zwischenlager zu bauen. Das Gebiet das dafür in Frage kommt ist dabei durch ein Rechteck begrenzt. Das Lager soll so platziert werden, dass es den größtmöglichen Abstand zum nächsten anderen Lager hat, damit es die Überdeckung verbessert. S_C hat aber gerade nur noch Zeit für $O(n \log n)$ Rechenschritte bevor das Lager eingerichtet werden muss.

a) Gib einen Algorithmus an, der die Position des neuen Lagers nach den geforderten Kriterien errechnet. Erläutere, warum dein Algorithmus korrekt ist und die geforderte Laufzeit einhält.

b) Angenommen die zu beliefernden Kinder sind gleichmäßig und dicht im Gebiet verteilt. Ist die Strategie von S_C geeignet um die maximale Laufstrecke zwischen einem Lager und einem Kind in dessen Einflussgebiet zu minimieren?
Falls nein, gib ein Gegenbeispiel mit kurzer Erläuterung an. Falls ja, beweise warum es keine Position für das neue Lager geben kann, die zu einem kürzeren längsten Laufweg führt.

(Hinweis: Der Engel Castiel kann in $O(n \log n)$ eine DCEL erstellen, die das Voronoi-Diagramm zu den Lagern inklusive des begrenzenden Rechteck enthält. Die Flächen in der DCEL enthalten dabei Verweise auf ihre Sites.)

(30+20 P.)

Aufgabe 2 (Voronoi-Diagramme):

a) Zeige oder widerlege: Die Voronoi-Zelle einer Site kann aus einem einzelnen Punkt bestehen.

b) Zeige oder widerlege: Eine Voronoi-Kante kann durch eine Site laufen.

c) Gegeben 3 Punkte $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$, die nicht alle auf einer Geraden liegen.
Zeige: Das Voronoi-Diagramm $Vor(\{p_1, p_2, p_3\})$ hat einen eindeutig bestimmten Voronoi-Knoten.

d) Gegeben eine endliche Punktmenge $\emptyset \subset P \subset \mathbb{R}^2$ (Sites) und ihr Voronoi-Diagramm $Vor(P)$. Sei $q \in P$ eine beliebige Site und $V_P(q)$ die Voronoi-Zelle von q in $Vor(P)$.
Zeige: $Vor(P \setminus \{q\})$ unterscheidet sich von $Vor(P)$ nur im Bereich $V_P(q)$.

Anschaulicher: Wenn aus einem Voronoi-Diagramm eine Site gelöscht wird, ändert sich das Voronoi-Diagramm nur im Bereich der Voronoi-Zelle der gelöschten Site.

(15+15+20+20 P.)

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!